Ueber die

Mittelflächen isotroper Strahlensysteme.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät Sektion II

der K. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht am 1. Juli 1912

von

Ludwig Pausch.

München 1912

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Ueber die

Mittelflächen isotroper Strahlensysteme.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät Sektion II

der K. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht am 1. Juli 1912

von

Ludwig Pausch.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

München 1912

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548303_0082

Einleitung.

Die folgende Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der Mittelflächen von isotropen Strahlensystemen, die bekanntlich in engem Zusammenhang mit den Minimalflächen stehen, und zwar im allgemeinen unter der Annahme, daß die dabei vorkommenden willkürlichen Funktionen rational sind. Das I. Kapitel bezweckt eine Einführung in das untersuchte Gebiet. Das II. Kapitel enthält sodann einige Untersuchungen über Minimalkurven, sowie die Bestimmung von Ordnung und Klasse eines isotropen Strahlensystems. Im nächsten Kapitel wird die Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Es wird gezeigt, daß die Schnittkurve der Brennflächen des Strahlensystems auf seiner Mittelfläche eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Durch Untersuchung der unendlich fernen Kurve ergibt sich sodann die Ordnung der Fläche. Dabei entzieht sich zunächst ein Teil der unendlich fernen Kurve der Bestimmung, indem er einigen Fundamentalpunkten der durch die Parameterdarstellung vermittelten Abbildung der Fläche auf die Ebene entspricht und wobei auch das von Clebsch angegebene Grenzverfahren versagt. Dies gibt Veranlassung zu einer Untersuchung, wie bei der Parameterdarstellung einer beliebigen Fläche in solchen Fällen die betreffenden Kurven erhalten werden können. Ferner werden Klasse und Rang, sowie einige weitere Singularitäten der Mittelfläche bestimmt. Im IV. Kapitel wird die Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems untersucht, das zu einer Minimaldoppelfläche in Beziehung steht. Das letzte Kapitel bringt als

Beispiel die Untersuchung der Mittelfläche einer isotropen Strahlenkongruenz, die zur Enneperschen Minimalfläche gehört, und zwar zunächst derjenigen Fläche, deren Gleichungen die einfachste Gestalt haben, während am Schluß des Kapitels die Mittelfläche irgend eines zur Enneperschen Minimalfläche gehörenden isotropen Strahlensystems kurz behandelt wird.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Hofrat Professor Dr. A. Voss, von dem ich die Anregung zu dieser Arbeit erhielt und der mir auch später mit seinem wertvollen Rate zur Seite stand, erlaube ich mir auch an dieser Stelle hiefür meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Kapitel I.

Zusammenhang zwischen Minimalflächen und isotropen Strahlensystemen.

§ 1. Die über isotrope Strahlensysteme geltenden Sätze.

In einer im Jahre 1882 erschienenen Abhandlung über Minimalflächen hat A. Ribaucour diejenigen Strahlensysteme untersucht, deren Brennflächen zwei abwickelbare Flächen sind, die den imaginären Kugelkreis enthalten, und die von ihm „isotrope" Strahlensysteme genannt wurden[1]). Jede Gerade eines solchen Strahlensystems ist der Schnitt zweier Minimalebenen, nämlich der Schmiegungsebenen der Rückkehrkanten jener Brennflächen. Eine isotrope Strahlenkongruenz enthält ∞^2 reelle Gerade, wenn ihre Brennflächen konjugiert komplex sind.

Unter dem Mittelpunkt einer Geraden eines Strahlensystems versteht man bekanntlich den Punkt, der von den beiden Brennpunkten der Geraden gleich weit entfernt ist. Die Mittelebene ist die Ebene, welche im Mittelpunkt auf der Geraden senkrecht steht. Die Fläche, die von den Mittelebenen umhüllt wird, wird Mittelenveloppe, der Ort der Mittelpunkte Mittelfläche genannt[2]). Bei einem isotropen Strahlensystem ist die Mittelenveloppe

---

[1]) A. Ribaucour, „Études des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle"; mémoires couronnés et mémoires des savants etrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 44, 1882, S. 3.

[2]) E. v. Weber nennt in seiner Abhandlung „Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen 2. Ordnung" (Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wissenschaften, Bd. 34 (1904), S. 417—483) die Enveloppe der Mittelebenen „Mittelfläche" und die Fläche der Mittelpunkte „Striktionsfläche".

eine Minimalfläche[1]), welche von den Mittelpunkten der Verbindungslinien irgend zweier Punkte der beiden Minimalkurven gebildet wird, deren Tangentenflächen die Brennflächen des Strahlensystems sind.

Die Gleichung der Schmiegungsebene einer Minimalkurve kann in der Form geschrieben werden[2]):

$$(1) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 4f(u) = 0,$$

wo $f(u)$ eine beliebige Funktion des komplexen Parameters u ist. Die Gleichung der Schmiegungsebene der zweiten Minimalkurve sei:

$$(2) \qquad (1-v^2)x - i(1+v^2)y + 2vz + 4\varphi(v) = 0.$$

Für ein reelles Strahlensystem ist dann v zu u konjugiert und $\varphi(v)$ die konjugiert komplexe Funktion von $f(u)$. Die Koordinaten der Punkte der ersten Minimalkurve ergeben sich aus (1) in der Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_1 = (1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u) \\ \eta_1 = i\{(1+u^2)f''(u) - 2uf'(u) + 2f(u)\} \\ \zeta_1 = 2uf''(u) - 2f'(u) \end{cases}$$

und die Koordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 der Punkte der konjugiert komplexen Kurve ergeben sich daraus durch Vertauschung von i mit $-i$, u mit v und $f(u)$ mit $\varphi(v)$.

Nun sind die Punkte der Minimalfläche, der Mittelenveloppe des isotropen Strahlensystems, gegeben durch:

$$(4) \qquad x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad y = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \quad z = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}.$$

Die Tangentialebene dieser Minimalfläche hat die Gleichung[3]):

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(u+v)x + i(v-u)y + (uv-1)z + 2vf(u) + 2u\varphi(v) \\ &\qquad - (1+uv)(f'(u) + \varphi'(v)) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung und die beiden Gleichungen (1) und (2) geben nach x, y, z aufgelöst die Koordinaten des Schnittpunkts der drei Ebenen, d. h. der Punkte der Mittelfläche des Strahlensystems, das von den Schnittlinien je zweier Schmiegungsebenen der beiden Minimalkurven gebildet wird[4]):

---

[1]) G. Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces". Paris 1887, I, S. 420.

[2]) Ebenda, S. 342. [3]) Ebenda I, S. 296. [4]) Ebenda IV, S. 17.

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{1+uv}(f'(u)+\varphi'(v)) - 2\dfrac{f(u)+\varphi(v)}{1+uv} \\ y = i\dfrac{v-u}{1+uv}(f'(u)+\varphi'(v)) - 2i\dfrac{\varphi(v)-f(u)}{1+uv} \\ z = \dfrac{uv-1}{1+uv}(f'(u)+\varphi'(v)) - 2\dfrac{u\varphi(v)+vf(u)}{1+uv}. \end{cases}$$

Die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche und zugleich der Geraden der isotropen Kongruenz oder auch die Koordinaten der Punkte der Kugel vom Radius 1, auf welche die Minimalfläche sphärisch abgebildet ist und die gleichzeitig der Mittelfläche des Strahlensystems durch Orthogonalität der Elemente entspricht[1]), sind:

$$(7)\qquad X_0 = \frac{u+v}{1+uv},\quad Y_0 = i\frac{v-u}{1+uv},\quad Z_0 = \frac{uv-1}{1+uv}.$$

§ 2. Wahl der Funktionen $f(u)$ und $\varphi(v)$.

Im folgenden wird insbesondere der Fall näher untersucht werden, daß $f(u)$ eine rationale Funktion von u ist. Dann ist es gestattet, $f(u)$ in der folgenden Form anzunehmen[2]):

$$f(u) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{A_{il_i}}{(u-a_i)^{l_i}} + \frac{A_{i,\,l_i-1}}{(u-a_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{A_{i1}}{u-a_i}\right).$$

Aber man hat zu bedenken, daß eine Minimalfläche — auch ihrer Lage nach — ungeändert bleibt, wenn man statt $f(u)$ schreibt[3]):

$$f(u) + ai(1-u^2) + b(1+u^2) + ciu,$$

wo a, b, c reelle Konstante sind. Wohl aber ändert sich dabei das isotrope Strahlensystem und seine Mittelfläche. Eine Minimalfläche kann eben auf ∞^3 Arten als Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinien je zweier Punkte zweier Minimalkurven erzeugt werden. Wenn wir dies berücksichtigen wollen, so müssen wir für $f(u)$ den folgenden Wert benutzen (und für $\varphi(v)$ die konjugiert komplexe Funktion):

$$(8)\qquad \begin{aligned} f(u) &= ai(1-u^2) + b(1+u^2) + ciu \\ &+ \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{A_{il_i}}{(u-a_i)^{l_i}} + \frac{A_{i,\,l_i-1}}{(u-a_i)^{l_i-1}} + \cdots + \frac{A_{i1}}{u-a_i}\right). \end{aligned}$$

[1]) Darboux, a. a. O. IV, S. 15. [2]) Ebenda I, S. 303 und S. 370.
[3]) Ebenda I, S. 292.

Kapitel II.

Die Minimalkurven und die isotropen Strahlensysteme, zu denen sie Veranlassung geben.

§ 1. Die Minimalkurven.

Wenn man für $f(u)$ die in Gleichung (8) des vorigen Kapitels angegebene Form benutzt, so ergibt sich als Ordnung der dazu gehörenden Minimalkurve[1])

$$O_1 = \sum_{i=1}^{p} l_i + 2p,$$

als Klasse

$$K_1 = \sum_{i=1}^{p} l_i + 2$$

und als Rang oder als Ordnung ihrer Tangentenfläche

$$R_1 = \sum_{i=1}^{p} l_i + p + 2. \tag{1}$$

Setzt man denselben Wert von $f(u)$ in die Gleichung (1) S. 6 ein, schreibt für x, y, z bzw. $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ und bringt auf gemeinsamen Nenner, so wird die Gleichung der Schmiegungsebene der einen Minimalkurve:

$$\prod_{i=1}^{p} (u - a_i)^{l_i} \cdot \{(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 4t[a\,i(1-u^2) + b(1+u^2) + ciu]\} + 4t \cdot \sum_{i=1}^{p} \left\{ \prod_{k=1}^{p}{}' (u-a_k)^{l_k} \cdot [A_{il_i} + A_{i,l_i-1}(u-a_i) + \cdots + A_{i1}(u-a_i)^{l_i-1}] \right\} = 0,$$

[1]) Darboux, a. a. O. I, S. 370–371.

wo der Akzent bei Π bedeutet, daß k nicht den Wert i annehmen soll. Werden die Ausdrücke für $f(u)$, $f'(u)$ und $f''(u)$ in die Gleichungen (3) S. 6 eingesetzt, so sieht man, daß für $u = a_i$ ein unendlich ferner Punkt der Minimalkurve entsteht. Die Schmiegungsebene wird dafür die unendlich ferne Ebene, wie die obige Gleichung zeigt. Diese Punkte liegen auf dem Kugelkreis und die Kurve berührt in ihnen den letzteren. Für $l_i = 1$ ist die unendlich ferne Ebene gewöhnliche Schmiegungsebene, für $l_i = 2$ stationäre Ebene; allgemein sind im Punkte $u = a_i$ l_i Schmiegungsebenen in der unendlich fernen Ebene vereinigt; sie hat in diesem Punkte mit der Kurve $l_i + 2$ Punkte gemein.

Soll eine Schmiegungsebene der einen Minimalkurve zu einer der konjugierten parallel sein, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2) S. 6:

$$1 - u^2 = \varrho(1 - v^2)$$
$$1 + u^2 = -\varrho(1 + v^2)$$
$$u = \varrho v$$

oder, wenn man die ersten beiden Gleichungen durch die letzte dividiert:

$$(u - v)(1 + uv) = 0$$
$$(u + v)(1 + uv) = 0.$$

Da $u = 0$, $v = 0$ nicht den obigen drei Gleichungen genügt, so folgt

$$1 + uv = 0. \tag{2}$$

Zu jeder Schmiegungsebene u der einen Minimalkurve ist die Schmiegungsebene $v = -\frac{1}{u}$ der anderen Kurve parallel, d. h. sie schneiden sich in einer Tangente des Kugelkreises. Die Tangenten des letzteren gehören also dem isotropen Strahlensystem an.

Zwei parallele Schmiegungsebenen fallen insbesondere zusammen, wenn noch

$$f(u) = \varrho\varphi(v)$$

ist. Zu der Gleichung (2) kommt dann wegen $\varrho = \frac{u}{v}$ noch hinzu

$$vf(u) = u\varphi(v) \tag{3}$$

oder man hat die eine Gleichung

$$f(u) + u^2\varphi\left(-\frac{1}{u}\right) = 0. \tag{4}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben diejenigen Punkte der ersten Minimalkurve, deren Schmiegungsebenen zugleich Schmiegungsebenen der zweiten Minimalkurve sind. Ist die Gleichung (4) für jeden Wert von u erfüllt, so fallen die beiden Minimalkurven zusammen[1]).

Hat $f(u)$ den in (8) S. 7 angegebenen Wert und $\varphi(v)$ den entsprechenden, der entsteht, indem i durch $-i$, u durch v, A_{il_i} durch B_{im_i}, a_i durch b_i und p durch q ersetzt wird, so wird die Gleichung (4):

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{A_{il_i}}{(u-a_i)^{l_i}}+\frac{A_{i,l_i-1}}{(u-a_i)^{l_i-1}}+\cdots+\frac{A_{i1}}{u-a_i}\right)$$
$$+u^3\cdot\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{B_{im_i}u^{m_i-1}}{(-1)^{m_i}(1+b_iu)^{m_i}}+\frac{B_{i,m_i-1}u^{m_i-2}}{(-1)^{m_i-1}(1+b_iu)^{m_i-1}}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{B_{i1}}{-(1+b_iu)}\right)-2(ai-b)u^2+2ciu+2(ai+b)=0.$$

Auf gemeinsamen Nenner

$$\prod_{i=1}^{p}(u-a_i)^{l_i}\cdot\prod_{k=1}^{q}(1+b_ku)^{m_k}$$

gebracht, zeigt der Ausdruck, daß der höchste Grad in u beim Faktor von $-2(ai-b)$ und in der zweiten Summe vorkommt. Der Grad des Faktors von irgend einem der B ist nämlich:

$$m_i-1+\sum_{k=1}^{q}{}' m_k+\sum_{i=1}^{p}l_i+3=\sum_{i=1}^{p}l_i+\sum_{i=1}^{q}m_i+2.$$

Dies ist also die Zahl der gemeinsamen Schmiegungsebenen, soweit sie im Endlichen gelegen sind. Denn auch die unendlich ferne Ebene ist gemeinsame Schmiegungsebene und zwar zählt sie für

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}l_im_k=\Sigma l_i\cdot\Sigma m_k$$

gemeinsame Schmiegungsebenen.

Für die Tangentenfläche der ersten Minimalkurve bestehen die Gleichung (1) S. 6 und die daraus durch Differentiation nach u folgende Gleichung. Zwei analoge Gleichungen gelten für die Tangenten-

[1]) Darboux, a. a. O., I. S. 351.

fläche der zweiten Minimalkurve. Die Elimination von x, y, z aus diesen vier Gleichungen ergibt eine Beziehung zwischen u und v, welche die Schnittkurve der Brennflächen des isotropen Strahlensystems charakterisiert. Die Rechnung ergibt folgende Gleichung:

$$(1 + uv)\{2(vf(u) - u\varphi(v)) + (1 + uv)(\varphi'(v) - f'(u))\} = 0.$$

$1 + uv = 0$ bedeutet, daß die Schmiegungsebenen, die durch die beiden zum Schnitt kommenden Tangenten der Minimalkurven gehen, parallel sind, der Schnittpunkt der Tangenten also auf dem Kugelkreis liegt. Die Gleichung bedeutet daher den Kugelkreis, während

$$2(vf(u) - u\varphi(v)) + (1 + uv)(\varphi'(v) - f'(u)) = 0 \tag{5}$$

die im Endlichen gelegene Schnittkurve darstellt. Da diese Kurve, wie leicht einzusehen ist, auf der Mittelfläche des isotropen Strahlensystems liegt[1]), so ist sie durch die Gleichungen (6) S. 7 und die obige Gleichung (5) gegeben.

Die Ordnung der im Endlichen gelegenen Schnittkurve der Brennflächen ist, wenn R_1 und R_2 die Rangzahlen der beiden Minimalkurven sind und M_1 und M_2 angeben, wie oft jede der Tangentenflächen durch den Kugelkreis geht, offenbar $R_1 R_2 - 2 M_1 M_2$. Sind $f(u)$ und $\varphi(v)$ rationale Funktionen, also $M_1 = M_2 = 1$[2]), so wird diese Zahl nach (1) S. 8:

$$R_1 R_2 - 2 = (\Sigma l_i + p)(\Sigma m_i + q) + 2(\Sigma l_i + \Sigma m_i + p + q) + 2.$$

Wir können somit die Sätze aussprechen: Zu jeder Schmiegungsebene einer Minimalkurve, die zu dem Parameter u gehört, ist die Schmiegungsebene der konjugierten Minimalkurve mit dem Parameter $v = -\frac{1}{u}$ parallel. Unter ihnen sind $\Sigma l + \Sigma m + 2$ beiden Kurven gemeinsame Schmiegungsebenen, deren Parameter die Wurzeln der Gleichung (4) sind, während die unendlich ferne Ebene für $\Sigma l \cdot \Sigma m$ gemeinsame Schmiegungsebenen zählt. Die Schnittkurve der Tangentenflächen der beiden Minimalkurven besteht aus dem Kugelkreis und einer Kurve, die durch die Gleichung (5) dargestellt und deren Ordnung $R_1 R_2 - 2$ ist.

[1]) Ribaucour, a. a. O., S. 55.
[2]) Darboux, a. a. O. I, S. 370.

§ 2. Ordnung und Klasse eines isotropen Strahlensystems.

Da durch jeden Punkt des Raumes K_1 Schmiegungsebenen der einen und K_2 Schmiegungsebenen der anderen Minimalkurve gehen, so ist die Ordnung des isotropen Strahlensystems:

$$K_1 K_2 = (\Sigma l_i + 2)(\Sigma m_i + 2).$$

Sind die beiden Minimalkurven zueinander konjugiert, so sind von den K_1^2 Geraden des Strahlensystems, die durch einen Punkt gehen, immer K_1 reell.

Die Klasse des Strahlensystems ist gleich der Zahl der gemeinsamen Tangenten der Schnittkurven einer beliebigen Ebene mit dem System der Schmiegungsebenen der beiden Minimalkurven, vermindert um die Zahl derjenigen gemeinsamen Tangenten, die ihr Entstehen gemeinsamen Schmiegungsebenen der Minimalkurven verdanken. Die Klasse des isotropen Strahlensystems ist daher:

$$\begin{aligned}(\Sigma l_i + 2)(\Sigma m_i + 2) - \Sigma l_i \cdot \Sigma m_i - \Sigma l_i - \Sigma m_i - 2 \\ = \Sigma l_i + \Sigma m_i + 2 = K_1 + K_2 - 2.\end{aligned}$$

Die Klasse ist also gleich der Zahl der im Endlichen gelegenen gemeinsamen Schmiegungsebenen.

Fallen die beiden Minimalkurven zusammen, d. h. besteht das Strahlensystem aus den Schnittlinien je zweier Schmiegungsebenen einer Minimalkurve, so gelten die eben abgeleiteten Zahlen nicht mehr. Die Ordnung ist dann offenbar

$$\tfrac{1}{2} K(K-1),$$

wenn K die Klasse der Minimalkurve ist.

Die Klasse dieses Strahlensystems ist gleich der Zahl der Doppeltangenten eines ebenen Schnitts der Tangentenfläche der Minimalkurve, vermindert um die Zahl derer, die in Doppelschmiegungsebenen ihre Ursache haben. Ist Δ die Zahl dieser Ebenen, $g + \Delta$ die Zahl der Doppeltangenten des ebenen Schnitts überhaupt, α die Zahl der stationären Schmiegungsebenen und Θ die der stationären Tangenten der Minimalkurve, so bestehen für eine ebene Schnitt-

kurve der Tangentenfläche die folgenden zwei Plückerschen Gleichungen[1]):

$$R = K(K-1) - 2(g + \Delta) - 3\alpha$$
$$O + \Theta = 3K(K-2) - 6(g + \Delta) - 8\alpha.$$

Hieraus folgt durch Elimination von α:

$$2(g + \Delta) = K(K-10) - 3(O + \Theta) + 8R.$$

Eine Minimalkurve, deren Tangentenfläche den Kugelkreis einfach enthält, kann keine im Endlichen gelegene Doppelschmiegungsebene haben, da sonst durch einen Punkt des Kugelkreises zwei Tangenten der Kurve gehen würden. Wohl aber ist die unendlich ferne Ebene mehrfache Schmiegungsebene, sofern $p > 1$ ist. Unter Δ ist also die Vielfachheit der unendlich fernen Ebene als Schmiegungsebene zu verstehen. Ferner kann eine Minimalkurve keine stationären Tangenten haben, d. h. Tangenten, durch welche drei unendlich benachbarte Schmiegungsebenen gehen, da durch eine Minimalgerade nicht drei unendlich benachbarte Ebenen gehen können, die den Kugelkreis berühren. Somit ist $\Theta = O$ und die Klasse des Strahlensystems wird:

$$g = \tfrac{1}{2}\{K(K-10) - 3O + 8R\} - \Delta$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma l_i(\Sigma l_i - 1) + p - \Delta.$$

Damit ist in allen Fällen Ordnung und Klasse eines isotropen Strahlensystems berechnet, sofern die vorkommenden willkürlichen Funktionen rational sind.

[1]) G. Salmon, „Analytische Geometrie des Raumes“. Deutsch von W. Fiedler. II. Teil, 2. Aufl. Leipzig 1874, S. 108.

Kapitel III.

Die Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems.

§ 1. Die Gleichung der Tangentialebene.

Wir schreiben die Gleichungen jener drei Ebenen, deren Schnittpunkt auf der Mittelfläche des isotropen Strahlensystems liegt (vgl. die Gleichungen (5), (1), (2) in Kap. I) jetzt folgendermaßen, indem ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 wie in (3) S. 6 die Koordinaten der Punkte der beiden Minimalkurven bedeuten:

$$(u+v)\left(x-\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)+i(v-u)\left(y-\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)+(uv-1)\left(z-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)=0$$

$$(1-u^2)(x-\xi_1)+i(1+u^2)(y-\eta_1)+2u(z-\zeta_1)=0$$

$$(1-v^2)(x-\xi_2)-i(1+v^2)(y-\eta_2)+2v(z-\zeta_2)=0.$$

Die Auflösung nach x, y, z ergibt mit Benutzung der Gleichungen (7), S. 7 folgende Darstellung der Mittelfläche[1]):

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{\xi_1+\xi_2}{2}+\frac{i}{2}\{Y_0(\zeta_1-\zeta_2)-Z_0(\eta_1-\eta_2)\}\\ y &= \frac{\eta_1+\eta_2}{2}+\frac{i}{2}\{Z_0(\xi_1-\xi_2)-X_0(\zeta_1-\zeta_2)\}\\ z &= \frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}+\frac{i}{2}\{X_0(\eta_1-\eta_2)-Y_0(\xi_1-\xi_2)\}. \end{aligned}$$

Man kommt also von einem Punkt der Minimalfläche zu dem entsprechenden der Mittelfläche, indem man auf der Tangente der Minimalfläche fortgeht, die auf der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte der beiden Minimalkurven senkrecht steht.

[1]) Nach Vollendung dieser Arbeit bemerkte ich, daß diese Gleichungen im wesentlichen auch in der Abhandlung von A. Kommerell, „Strahlensysteme und Minimalflächen", Math. Ann., 70. Bd. (1911), S. 155 (Gleich. (31)) enthalten sind, ebenso die auf S. 15 folgenden für die Richtungskosinus der Normalen.

Für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale der Mittelfläche gilt bekanntlich:

$$X : Y : Z = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) : \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Nun ist, wenn der Akzent die Differentiation nach dem Argument bedeutet, nach (1):

$$2\frac{\partial x}{\partial u} = \xi_1' + i(Y_0\zeta_1' - Z_0\eta_1') + i\left(\frac{\partial Y_0}{\partial u}(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\partial Z_0}{\partial u}(\eta_1 - \eta_2)\right)$$
$$2\frac{\partial x}{\partial v} = \xi_2' - i(Y_0\zeta_2' - Z_0\eta_2') + i\left(\frac{\partial Y_0}{\partial v}(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\partial Z_0}{\partial v}(\eta_1 - \eta_2)\right),$$

sowie zwei entsprechende Gleichungspaare. Da X_0, Y_0, Z_0 die Richtungskosinus der Normalen der Minimalfläche sind, so ist wegen (4), S. 6:

$$X_0 = -i\frac{\eta_1'\zeta_2' - \zeta_1'\eta_2'}{\xi_1'\xi_2' + \eta_1'\eta_2' + \zeta_1'\zeta_2'}$$

analog Y_0 und Z_0. Mit Hilfe dieser Formel überzeugt man sich, daß

$$\xi_1' + i(Y_0\zeta_1' - Z_0\eta_1') = 0$$
$$\xi_2' - i(Y_0\zeta_2' - Z_0\eta_2') = 0$$

ist. Demnach wird:

$$2\frac{\partial x}{\partial u} = i\left(\frac{\partial Y_0}{\partial u}(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\partial Z_0}{\partial u}(\eta_1 - \eta_2)\right)$$
$$2\frac{\partial x}{\partial v} = i\left(\frac{\partial Y_0}{\partial v}(\zeta_1 - \zeta_2) - \frac{\partial Z_0}{\partial v}(\eta_1 - \eta_2)\right).$$

Da nun

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}(\xi_1 - \xi_2) = 0 \quad \text{und} \quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}(\xi_1 - \xi_2) = 0$$

ist, so folgt:

$$X : Y : Z = (\xi_1 - \xi_2) : (\eta_1 - \eta_2) : (\zeta_1 - \zeta_2);$$

d. h. die Tangentialebene in einem Punkt der Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems steht auf der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte der das Strahlensystem erzeugenden Minimalkurven senkrecht[1]).

[1]) Man vgl. die S. 5 erwähnte Abhandlung von E. v. Weber, Art. 49, Seite 481.

Nach (1) ergibt sich nun als Gleichung der Tangentialebene:

$$\left(x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)(\xi_1 - \xi_2) + \left(y - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right)(\eta_1 - \eta_2) + \left(z - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right)(\zeta_1 - \zeta_2) = 0, \tag{2}$$

welche aussagt, daß die Tangentialebene der Mittelfläche durch den entsprechenden Punkt der Minimalfläche geht[1]).

Die Gleichung (2) versagt in einem Schnittpunkt der beiden Minimalkurven (der natürlich der Mittelfläche angehört). Im allgemeinen werden sich die beiden Minimalkurven nicht schneiden; hat aber eine Minimalkurve einen reellen Punkt, so geht auch die konjugiert komplexe Kurve durch ihn, der daher ein reeller Punkt der Mittelfläche ist, in dem die Tangentialebene zunächst unbestimmt ist. Da aber die Verbindungslinien der einem Schnittpunkt zweier Kurven unendlich benachbarten Punkte in der Ebene der beiden Kurventangenten liegen, so wird man schließen, daß in einem Schnittpunkt der beiden Minimalkurven die Mittelfläche unendlich viele Tangentialebenen hat, die ein Büschel bilden, dessen Achse auf den Tangenten der beiden Minimalkurven im Schnittpunkt senkrecht steht, d. h. der isotropen Kongruenz angehört.

Analytisch zeigt sich dies so: Ist $v = \varphi(u)$ die Gleichung einer Kurve auf der Mittelfläche, die durch einen beiden Minimalkurven gemeinsamen Punkt u_0, v_0 geht, so wird der Wert von

$$(\xi_1 - \xi_2) : (\eta_1 - \eta_2) : (\zeta_1 - \zeta_2)$$

in diesem Punkte

$$\left(\xi'_{10} - \xi'_{20}\left(\frac{dv}{du}\right)_0\right) : \left(\eta'_{10} - \eta'_{20}\left(\frac{dv}{du}\right)_0\right) : \left(\zeta'_{10} - \zeta'_{20}\left(\frac{dv}{du}\right)_0\right),$$

wenn der Index Null bedeutet, daß $u = u_0$, $v = v_0$ gesetzt wurde. Die dadurch bestimmte Richtung ist aber für alle ∞^1 Werte von $\left(\frac{dv}{du}\right)_0$, d. h. für alle durch den Punkt gehenden Kurven, parallel zu der Ebene der beiden Richtungen

$$\xi'_{10} : \eta'_{10} : \zeta'_{10} \quad \text{und} \quad \xi'_{20} : \eta'_{20} : \zeta'_{20},$$

in Übereinstimmung mit dem geometrisch gefundenen Resultat.

[1]) Ribaucour, a. a. O., § 43, S. 58 und E. v. Weber, a. a. O., Art. 49, S. 482.

Setzt man in dem von x, y, z freien Glied der Gleichung (2) die Werte von ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 vermöge der Formeln (3) S. 6 ein, so wird die Gleichung der Tangentialebene:

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(\xi_1-\xi_2)x+(\eta_1-\eta_2)y+(\zeta_1-\zeta_2)z\\&-2\{[(f'(u))^2-2f(u)f''(u)]-[(\varphi'(v))^2-2\varphi(v)\varphi''(v)]\}=0.\end{aligned}$$

Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind in folgender geometrischer Vorstellung enthalten: Die Minimalfläche ist die Mittelfläche desjenigen Strahlensystems, das aus den Verbindungslinien der Punkte der einen Minimalkurve mit denen der anderen besteht. Die Mittelenveloppe dieses Strahlensystems ist die Mittelfläche des zugehörigen isotropen Strahlensystems und umgekehrt ist die Mittelenveloppe des isotropen Strahlensystems die Minimalfläche. Je zwei entsprechende, d. h. zu denselben Parameterwerten gehörende Gerade der beiden Kongruenzen haben als kürzesten Abstand die Schnittlinie ihrer Mittelebenen oder mit anderen Worten die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Diese letzteren Geraden bilden eine neue Kongruenz, deren Brennflächen die Mittelfläche des isotropen Strahlensystems und die Minimalfläche sind[1]).

§ 2. Die ∞^3 zu einer Minimalfläche gehörenden isotropen Strahlensysteme.

Zu einer Minimalfläche gehören ∞^3 isotrope Strahlensysteme. Die Koordinaten der Punkte der sie erzeugenden Minimalkurven drücken sich durch die früheren so aus:

$$\begin{aligned}&\Xi_1=\xi_1-4ai;\quad H_1=\eta_1+4bi;\quad Z_1=\zeta_1-2ci\\&\Xi_2=\xi_2+4ai;\quad H_2=\eta_2-4bi;\quad Z_2=\zeta_2+2ci.\end{aligned}$$

Beide Minimalkurven werden also im entgegengesetzten Sinn um dasselbe Stück verschoben, woraus es sich erklärt, daß die Minimalfläche ungeändert bleibt. Nach den Gleichungen (1) S. 14 werden jetzt die Koordinaten eines Punktes der Mittelfläche des isotropen Strahlensystems, das natürlich ein anderes wird:

$$(4)\qquad \begin{aligned}x_1&=x+2cY_0+4bZ_0\\y_1&=y+4aZ_0-2cX_0\\z_1&=z-4bX_0-4aY_0,\end{aligned}$$

[1]) Ribaucour, a. a. O., § 43, S. 58.

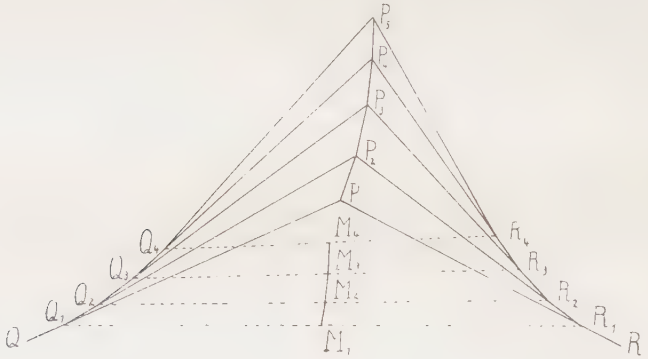
wenn x, y, z die Koordinaten eines Punktes der alten Mittelfläche sind. Von einem Punkt der letzteren kommt man also zu dem entsprechenden der neuen, indem man senkrecht zur zugehörigen Geraden der isotropen Kongruenz und zur Richtung $2a : -2b : c$ fortgeht. Das erstere steht damit im Einklang, daß jeder Punkt der Mittelfläche ja immer in der Tangentialebene im entsprechenden Punkt der Minimalfläche liegen muß. Die letztere Richtung ist die, in welcher die beiden Minimalkurven verschoben werden.

Die Gleichung der Tangentialebene der neuen Fläche wird:

$$(5)\quad (\xi_1 - \xi_2 - 8ai)x + (\eta_1 - \eta_2 + 8bi)y + (\zeta_1 - \zeta_2 - 4ci)z$$
$$- \tfrac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - \xi_2^2 - \eta_2^2 - \zeta_2^2) + 2i[2a(\xi_1 + \xi_2) - 2b(\eta_1 + \eta_2)$$
$$+ c(\zeta_1 + \zeta_2)] = 0.$$

§ 3. Die Schnittkurve der Brennflächen als Kurve auf der Mittelfläche.

Die Schnittkurve der Brennflächen eines isotropen Strahlensystems, die ja auf der Mittelfläche liegt, nimmt auf ihr eine ausgezeichnete Stellung ein, wie im folgenden gezeigt werden soll. Es seien $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ und $R, R_1, R_2, \ldots$ eine Reihe aufeinander fol-



gender Punkte der beiden Minimalkurven und es mögen sich QQ_1 und RR_1 in P_1, Q_1Q_2 und R_1R_2 in P_2, Q_2Q_3 und R_2R_3 in P_3 usw. schneiden, so daß also $P_1, P_2, P_3, \ldots$ unendlich benachbarte Punkte der Schnittkurve der Tangentenflächen der beiden Minimalkurven sind. Die den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ entsprechenden Punkte der Minimalfläche sind die Mittelpunkte $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von $Q_1R_1, Q_2R_2, Q_3R_3, \ldots$ Da nun jede Gerade der isotropen Kongruenz auf den

Tangenten in den entsprechenden Punkten der beiden Minimalkurven senkrecht steht, so ist P_1P_2 senkrecht zur Ebene $Q_2P_2R_2$ und P_2P_3 zur Ebene $Q_3P_3R_3$. Diese beiden Ebenen schneiden sich in Q_2R_2 und daher stehen P_1P_2 und P_2P_3 auf Q_2R_2 senkrecht. Die Tangentialebene der Mittelfläche im Punkte P_2 aber muß auf Q_2R_2 senkrecht stehen und geht durch M_2; in ihr liegen daher auch P_1P_2 und P_2P_3; d. h. die Tangentialebene der Mittelfläche längs der Schnittkurve der Brennflächen ist die Schmiegungsebene der Kurve.

Die Geraden P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ... sind daher Hauptnormalen der Kurve P_1, P_2, P_3, ... und die Geraden Q_1R_1, Q_2R_2, Q_3R_3, ... sind Schnittlinien benachbarter Normalebenen der Kurve. Da die letztere von den Hauptnormalen in den Krümmungsmittelpunkten getroffen werden, so sind die Punkte M_1, M_2, M_3, ... die Krümmungsmittelpunkte der Kurve P_1, P_2, P_3, ... Die der Schnittkurve der Brennflächen entsprechende Kurve auf der Minimalfläche ist daher der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte[1]). Ferner erkennt man, daß zu der Richtung M_1M_2 auf der Minimalfläche die Richtung Q_2R_2 konjugiert ist.

Ist die Schnittkurve der Brennflächen eine ebene Kurve, so ist die von ihren Normalebenen umhüllte Fläche ein auf ihrer Ebene senkrechter Zylinder, der die Minimalfläche längs ihrer Evolute berührt. Da die Ebene dieser Evolute durch die Normale der Minimalfläche geht, ist sie geodätische Linie auf der Minimalfläche[2]), und da in jedem ihrer Punkte die konjugierte Richtung auf ihr senkrecht steht, ist sie eine ebene Krümmungslinie.

Ist ein Punkt gleichzeitig Mittelpunkt zweier Geraden des Strahlensystems, so hat die Mittelfläche in ihm zwei Tangentialebenen, d. h. er gehört der Doppelkurve der Fläche an. Ist nun insbesondere ein Punkt gleichzeitig Mittelpunkt zweier unendlich benachbarter Strahlen des Systems, so gehört er der Rückkehrkurve der Mittelfläche an. Dies ist aber längs der Schnittkurve der Brennflächen der Fall; sie ist also Rückkehrkurve der Fläche.

Es kann ferner keine andere Kurve Rückkehrkurve der Fläche sein. Denn zu einem ihrer Punkte müssen zwei unendlich nahe

[1]) Ribaucour, a. a. O., § 40, S. 56. Hieraus ergibt sich natürlich auch bei Ribaucour, daß die Schmiegungsebene der Kurve Tangentialebene der Fläche ist, was dort nicht ausdrücklich gesagt ist.

[2]) Ebenda, § 41, S. 56.

Tangentialebenen und also auch zwei unendlich nahe Gerade der isotropen Kongruenz gehören, die jenen Punkt zum Mittelpunkt haben. Da sich aber unendlich benachbarte Gerade einer Kongruenz, wenn sie sich schneiden, nur in den Brennpunkten schneiden, so kann dies nur eintreten, wenn die Brennpunkte in den Mittelpunkt fallen, was eben nur für die Tangenten der Schnittkurve der Brennflächen der Fall ist.

Es ist bekannt, daß auf der Rückkehrkurve (ebenso wie auf der parabolischen Kurve) einer Fläche die beiden Haupttangenten zusammenfallen[1]). Beim Fortschreiten längs einer solchen Kurve dreht sich die Tangentialebene um die Haupttangente. In unserem Fall dreht sich die Tangentialebene der Fläche längs der Rückkehrkurve um die Tangente dieser Kurve, da sie Schmiegungsebene der Kurve ist. Die Tangente der Rückkehrkurve ist also Haupttangente. Übrigens läßt sich zeigen, daß die Mittelfläche eines isotropen Strahlensystems negatives Krümmungsmaß besitzt[2]). Daher sind auf beiden Mänteln der Fläche, die längs der Rückkehrkurve zusammenhängen, die Haupttangentenkurven reell.

Längs der Rückkehrkurve der Mittelfläche stehen Tangentialebene dieser Fläche und Tangentialebene der Minimalfläche oder, was dasselbe ist, Tangentialebene der Bildkugel aufeinander senkrecht. Da sich nun Mittelfläche und Kugel durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, so entspricht irgend einer Richtung in einem Punkt der Kugel, der einem Punkt der Rückkehrkurve der Mittelfläche zugeordnet ist, immer die Tangente der letzteren und nur der Richtung auf der Kugel, die zur Normalen der Mittelfläche parallel ist, kann jede Richtung auf der Mittelfläche entsprechen. Insbesondere kann den beiden aufeinander senkrechten Richtungen der Kugel, denen auf der Minimalfläche die Haupttangenten entsprechen, immer nur die Tangente der Rückkehrkurve zugeordnet sein, wenn nicht der ganz spezielle Fall eintritt, daß die eine dieser beiden Richtungen parallel zur Normalen der Mittelfläche ist. Denn dann könnte dieser Richtung irgend eine Tangente der Mittelfläche entsprechen. Nun entspricht einem konjugierten Kurvensystem auf

[1]) Vgl. die Bemerkung über Rückkehr- und parabolische Kurven einer Fläche bei A. Voss, „Über Komplexe und Kongruenzen“. Math. Ann. 9 (1875), S. 134.

[2]) L. Bianchi, „Vorlesungen über Differentialgeometrie“. Deutsch von Lukas. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1910, § 164, S. 306.

der Minimalfläche wieder ein konjugiertes System auf der Mittelfläche und daher entsprechen sich insbesondere die Haupttangentenkurven auf beiden Flächen[1]). Wenn also jener Ausnahmefall nicht eintritt, so ist damit aufs neue gezeigt, daß längs der Schnittkurve der Brennflächen die beiden Haupttangenten in die Kurventangente zusammenfallen.

Auch die folgende Überlegung führt dazu, daß im allgemeinen die Schnittkurve der Brennflächen eines isotropen Strahlensystems nicht zum System der Haupttangentenkurven der Mittelfläche gehören kann. Denn da die ihr entsprechende Kurve auf der Minimalfläche der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte ist (s. S. 19) und die Tangentialebenen der Minimalfläche längs ihr die Normalebenen der ersteren sind, so müßte, wenn die Kurve auf der Minimalfläche Haupttangentenkurve sein soll, die Normalebene der Rückkehrkurve der Mittelfläche Schmiegungsebene der Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte sein; mit anderen Worten der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve müßte die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche ihrer Normalebenen sein. In Wahrheit ist diese Rückkehrkante aber der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln und Krümmungsmittelpunkt und Mittelpunkt der Schmiegungskugel fallen nur für Kurven konstanter Krümmung zusammen[2]). Wenn also die Schnittkurve der Brennflächen konstante Krümmung hat, so gehört sie einer Schar der Haupttangentenkurven an. Gleichwohl fallen aber längs dieser Kurve beide Haupttangenten zusammen; denn die Kurve ist ja nach wie vor Rückkehrkurve. Man wird sich dies so vorzustellen haben, daß alle Haupttangentenkurven der einen Schar eine Haupttangentenkurve der anderen Schar berühren und durchsetzen.

Es soll noch gezeigt werden, daß dieser Ausnahmefall identisch ist mit dem früheren (S. 20), in dem eine der beiden Richtungen auf der Kugel, die den Haupttangenten der Minimalfläche entsprechen, parallel zur Schnittlinie der Tangentialebenen der Mittel- und Minimalfläche war. Wir werden sogleich beweisen, daß die Tangente der durch (5) S. 11 definierten Kurve auf der Kugel parallel ist zu der Schnittlinie der Tangentialebenen von Mittel- und Minimalfläche.

[1]) Ribaucour, a. a. O., § 48, S. 64. Damit sind zugleich auf den Mittelflächen isotroper Strahlensysteme die Haupttangentenkurven bestimmt.

[2]) G. Scheffers, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“. 1. Aufl. Leipzig 1901, I, S. 307 und 309.

Wenn also die Tangente dieser Kurve einer Haupttangente auf der Minimalfläche entspricht, so gehört die Rückkehrkurve der Mittelfläche einer Schar der Haupttangentenkurven an und damit sind die beiden Ausnahmefälle als miteinander identisch erwiesen.

Zu dem angekündigten Beweise brauchen wir die Differentialquotienten der Koordinaten X_0, Y_0, Z_0 der Kugelpunkte (Gleichung (7), S. 7) nach u und v, nämlich:

$$\frac{\partial X_0}{\partial u} = \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}; \quad \frac{\partial Y_0}{\partial u} = -i\frac{1+v^2}{(1+uv)^2}; \quad \frac{\partial Z_0}{\partial u} = \frac{2v}{(1+uv)^2}$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial v} = \frac{1-u^2}{(1+uv)^2}; \quad \frac{\partial Y_0}{\partial v} = i\frac{1+u^2}{(1+uv)^2}; \quad \frac{\partial Z_0}{\partial v} = \frac{2u}{(1+uv)^2}.$$

Längs der Schnittkurve der Brennflächen folgt aus Gleichung (5), S. 11:

$$\frac{dv}{du} = \frac{2\varphi(v) - v(f'(u) + \varphi'(v)) + (1+uv)f''(u)}{2f(u) - u(f'(u) + \varphi'(v)) + (1+uv)\varphi''(v)}.$$

Die Richtungskosinus der Tangente der durch (5) S. 11 auf der Kugel bestimmten Kurve sind nun proportional zu:

$$(6)\begin{cases} \dfrac{dX_0}{du} = \dfrac{2[(1-v^2)f+(1-u^2)\varphi]+(u+v)(uv-1)(f'+\varphi')+(1+uv)[(1-u^2)f''+(1-v^2)\varphi'']}{(1+uv)^2[2f-u(f'+\varphi')+(1+uv)\varphi'']} \\ \dfrac{dY_0}{du} = i\dfrac{2[(1+u^2)\varphi-(1+v^2)f]+(v-u)(uv-1)(f'+\varphi')+(1+uv)[(1+u^2)f''-(1+v^2)\varphi'']}{(1+uv)^2[2f-u(f'+\varphi')+(1+uv)\varphi'']} \\ \dfrac{dZ_0}{du} = 2\dfrac{2(vf+u\varphi)-2uv(f'+\varphi')+(1+uv)(uf''+v\varphi'')}{(1+uv)^2[2f-u(f'+\varphi')+(1+uv)\varphi'']}. \end{cases}$$

Andererseits sind die Richtungskosinus der Schnittlinie der Tangentialebenen in zwei entsprechenden Punkten der Mittel- und Minimalfläche oder, was dasselbe ist, der Verbindungslinie eines Punktes der Minimalfläche mit dem entsprechenden der Mittelfläche nach den Gleichungen (1) S. 14 proportional zu:

$$(7)\begin{cases} Y_0(\xi_1-\xi_2) - Z_0(\eta_1-\eta_2) = \dfrac{i}{1+uv}\{2(1-uv)(f+\varphi) \\ \quad +2[v(u^2-1)f'+u(v^2-1)\varphi']+(1+uv)[(1-u^2)f''+(1-v^2)\varphi'']\} \\ Z_0(\xi_1-\xi_2) - X_0(\eta_1-\eta_2) = \dfrac{i}{1+uv}\{2(uv-1)(f-\varphi) \\ \quad -2[v(1+u^2)f'-u(1+v^2)\varphi']+(1+uv)[(1+u^2)f''-(1+v^2)\varphi'']\} \\ X_0(\eta_1-\eta_2) - Y_0(\xi_1-\xi_2) = \dfrac{2i}{1+uv}\{2(vf+u\varphi) \\ \quad -2uv(f'+\varphi')+(1+uv)(uf''+v\varphi'')\}. \end{cases}$$

Die Bedingung, daß die durch (6) und (7) bestimmte Richtung dieselbe ist, führt auf die beiden Gleichungen:

$$(u - v)[2(vf - u\varphi) + (1 + uv)(\varphi' - f')] = 0$$
$$(u + v)[2(u\varphi - vf) + (1 + uv)(f' - \varphi')] = 0,$$

die wegen (5) S. 11 in der Tat erfüllt sind. Es ist also hiemit gezeigt, daß die Tangente derjenigen Kurve auf der Kugel, welche der Rückkehrkurve der Mittelfläche entspricht, zur Tangentialebene im entsprechenden Punkt der Mittelfläche parallel ist.

Der Umstand, daß längs der Rückkehrkurve die Schmiegungsebene Tangentialebene der Fläche ist, läßt den Schluß zu, daß die Rückkehrkurve auch parabolische Kurve der Fläche ist. In der Tat hat die Tangentialebene drei unendlich benachbarte Punkte mit der Rückkehrkurve gemein, d. h. sie berührt die Fläche in zwei aufeinander folgenden Punkten. Dies ist aber gerade die Eigenschaft der sogenannten stationären oder parabolischen Ebenen. Andererseits kann die Tangentialebene der Mittelfläche nur dann in zwei unendlich nahen Punkten berühren, wenn die zu ihr gehörige Gerade des isotropen Strahlensystems in ihr liegt, da nur dann die Möglichkeit besteht, daß die Gerade zwei unendlich nahe Mittelpunkte hat, und dies ist nur längs der Schnittkurve der Brennflächen der Fall. Allerdings wird sich später zeigen, daß die unendlich ferne Ebene die Fläche längs Geraden berührt, die man, wenn man will, auch zur parabolischen Kurve rechnen kann. Für die abwickelbare Fläche der parabolischen Tangentialebenen und insbesondere ihre Klasse kommt dies aber nicht in Betracht.

Wir können somit den Satz aussprechen: Die Schnittkurve der Brennflächen eines isotropen Strahlensystems ist auf der Mittelfläche Rückkehr- und parabolische Kurve, deren Schmiegungsebene Tangentialebene der Fläche ist. Sie wird von den Haupttangentenkurven berührt und gehört im allgemeinen selbst zu keiner der beiden Scharen der Haupttangentenkurven. Ferner ergab sich geometrisch der schon von Ribaucour gefundene Satz: Die der Schnittkurve der Brennflächen eines isotropen Strahlensystems entsprechende Kurve auf der Minimalfläche ist die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte.

§ 4. Bestimmung der Ordnung der Mittelfläche aus ihrer unendlich fernen Kurve.

Die Gleichung $1 + uv = 0$ bedeutete für die Schnittkurve der Brennflächen den Kugelkreis (Kap. II, § 1, S. 11). Dies gilt aber nicht auch für die Mittelfläche. Die drei Ebenen, als deren Schnittpunkt wir jeden Punkt der Mittelfläche erhalten haben, gehen in diesem Fall durch eine Gerade. Setzt man nämlich in der Gleichung (5) S. 6 $v = -\frac{1}{u}$, so erhält man:

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) - 2u^2\varphi\left(-\frac{1}{u}\right) = 0.$$

Die Tangentialebene der Minimalfläche geht also auch durch die Tangente des Kugelkreises, durch welche die entsprechenden Schmiegungsebenen der beiden Minimalkurven gehen. Die Gleichungen (6) (S. 7) der Mittelfläche aber geben für $v = -\frac{1}{u}$ bestimmte Punkte der unendlich fernen Ebene, nämlich:

$$\varrho x = (1-u^2)\left(f'(u) + \varphi'\left(-\frac{1}{u}\right)\right) + 2u\left(f(u) + \varphi\left(-\frac{1}{u}\right)\right)$$

$$\varrho y = i(1+u^2)\left(f'(u) + \varphi'\left(-\frac{1}{u}\right)\right) + 2ui\left(\varphi\left(-\frac{1}{u}\right) - \varphi(u)\right)$$

$$\varrho z = 2u\left(f'(u) + \varphi'\left(-\frac{1}{u}\right)\right) + 2\left(u^2\varphi\left(-\frac{1}{u}\right) - f(u)\right).$$

Diese Kurve ist jedoch nicht der Kugelkreis. Denn es ist:

$$\varrho^2(x^2 + y^2 + z^2) = 4\left(f(u) + u^2\varphi\left(-\frac{1}{u}\right)\right)^2,$$

also nicht für jeden Wert von u gleich Null, sofern die zugehörige Minimalfläche nicht eine Doppelfläche ist (vgl. (4) S. 9), ein Fall, der im nächsten Kapitel untersucht werden soll und in dem die Gleichung $1 + uv = 0$ eine andere Bedeutung hat.

Um die Ordnung dieser Kurve zu bestimmen, müssen wir in die Gleichungen (6) S. 7 den in (8) S. 7 für $f(u)$ angegebenen Wert und für $\varphi(v)$ den entsprechenden einsetzen. Bringt man dann die drei Ausdrücke für x, y, z auf gemeinsamen Nenner und führt ihn als vierte homogene Koordinate ϱt ein, so erhält man — bei Benutzung der Abkürzungen:

$$(8)\quad \begin{cases} S_{\Sigma l-1} = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \prod_{k=1}^{p}{}' (u-a_k)^{l_k} \cdot [A_{i l_i} + A_{i, l_i-1}(u-a_i) + \cdots + A_{i1}(u-a_i)^{l_i-1}] \right\} \\ S_{\Sigma l+p-2} = -\sum_{i=1}^{p} \left\{ \prod_{k=1}^{p}{}' (u-a_k)^{l_k+1} \cdot [l_i A_{i, l_i} + (l_i-1) A_{i, l_i-1}(u-a_i) \right. \\ \left. \qquad + \cdots + A_{i1}(u-a_i)^{l_i-1}] \right\} \end{cases}$$

und zweier analog gebildeter Ausdrücke $T_{\Sigma m-1}$ und $T_{\Sigma m+q-2}$ — die folgende Darstellung der Mittelfläche in homogenen Koordinaten:

$$(9)\quad \begin{cases} \varrho x = (u+v) \left\{ \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot S_{\Sigma l+p-2} + \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot T_{\Sigma m+q-2} \right\} \\ \quad - 2 \prod_{i=1}^{p} (u-a_i) \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i) \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i} \cdot S_{\Sigma l-1} + \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i} \cdot T_{\Sigma m-1} \right\} \\ \quad + 2 \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot [2b(uv-1) + ci(v-u)] \\ \varrho y = i(v-u) \left\{ \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot S_{\Sigma l+p-2} + \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot T_{\Sigma m+q-2} \right\} \\ \quad + 2i \prod_{i=1}^{p} (u-a_i) \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i) \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i} \cdot S_{\Sigma l-1} - \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i} \cdot T_{\Sigma m-1} \right\} \\ \quad + 2 \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot [2a(uv-1) - c(u+v)] \\ \varrho z = (uv-1) \left\{ \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot S_{\Sigma l+p-2} + \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot T_{\Sigma m+q-2} \right\} \\ \quad - 2 \prod_{i=1}^{p} (u-a_i) \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i) \left\{ v \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i} \cdot S_{\Sigma l-1} + u \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i} \cdot T_{\Sigma m-1} \right\} \\ \quad + 4 \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1} \cdot [(ai-b)u - (ai+b)v] \\ \varrho t = (1+uv) \cdot \prod_{i=1}^{p} (u-a_i)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q} (v-b_i)^{m_i+1}. \end{cases}$$

Die Indizes der Ausdrücke S und T geben ihren Grad in u bzw. v an.

Setzt man nun $v = -\frac{1}{u}$, bringt alles auf gemeinsamen Nenner und nimmt ihn in den Proportionalitätsfaktor ϱ hinein, so zeigt sich, daß der höchste Grad, in dem u vorkommt, ist:

$$\sum_{i=1}^{p} l_i + \sum_{i=1}^{q} m_i + p + q + 2.$$

Dies ist daher die Ordnung der Kurve $1 + uv = 0$ auf der Mittelfläche.

Wird in der Gleichung (5) S. 11 $1 + uv = 0$ gesetzt, so bleibt Gleichung (4) S. 9. Die Schnittpunkte der Rückkehrkurve mit der Kurve $1 + uv = 0$ sind somit dieselben wie die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kugelkreis. Die unendlich fernen Punkte der Schnittkurve der Brennflächen des Strahlensystems liegen in der Tat teils auf dem Kugelkreis, teils sind sie die Schnittpunkte der unendlich fernen Tangenten der einen Minimalkurve mit denen der anderen.

Außer in der erwähnten Kurve schneidet die Mittelfläche die unendlich ferne Ebene nach (9) noch in den $p + q$ Kurven $u = a_i$ und $v = b_i$. Für $u = a_i$ ergibt sich aus (9):

$$\sigma x = v + a_i; \qquad \sigma y = i(v - a_i); \qquad \sigma z = a_i v - 1,$$

d. h. die unendlich ferne Gerade der Ebene

$$(1 - a_i^2)x + i(1 + a_i^2)y + 2a_i z = 0.$$

Die Vergleichung mit (1) S. 6 lehrt, daß sie den Kugelkreis im Punkte $u = a_i$ der ersten Minimalkurve berührt. Entsprechendes gilt für die Geraden $v = b_i$.

Da in dem Ausdruck für ϱt in (9) der Faktor $u - a_i$ in der $(l_i + 1)^{\text{ten}}$ Potenz auftritt, so zählt die Gerade $u = a_i$ für den Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der Fläche $(l_i + 1)$-fach, sämtliche Geraden $u = a_i$ und $v = b_i$, also

$$\sum_{i=1}^{p} (l_i + 1) + \sum_{i=1}^{q} (m_i + 1) = (\Sigma l + \Sigma m + p + q) \text{ mal.}$$

Damit ist aber die unendlich ferne Kurve der Mittelfläche noch nicht vollständig untersucht. Die Darstellung der Mittelfläche durch die Gleichungen (9) kann nämlich, wie jede Parameterdarstellung einer Fläche, als eine Abbildung der Fläche auf eine (u, v)-Ebene aufgefaßt werden. Dabei kann es vorkommen, daß gewissen Punkten der (u, v)-Ebene, den sogenannten Fundamentalpunkten, d. h. Punkten, für die

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0$$

ist, Kurven auf der Fläche entsprechen[1]) und es ist denkbar, daß einige dieser Kurven in der unendlich fernen Ebene liegen.

Um dies zu untersuchen, führen wir zunächst auf der Fläche homogene Parameter ein, indem wir setzen:

$$u = \frac{u_1}{u_3}, \qquad v = \frac{u_2}{u_3}.$$

Dabei setzen wir zur Abkürzung fest: Die ersten drei der Gleichungen (9) mögen sich für $a = b = c = 0$ reduzieren auf:

$$\varrho x = P'_{\Sigma l+\Sigma m+p+q-1}; \qquad \varrho y = Q'_{\Sigma l+\Sigma m+p+q-1}; \qquad \varrho z = R'_{\Sigma l+\Sigma m+p+q}.$$

(Die Indizes geben wieder den Grad des betreffenden Ausdrucks in den Variablen an.) Bei den entsprechenden homogenen Ausdrücken soll dann der Akzent fehlen. Dann erhält man die folgende Darstellung der Mittelfläche mittels homogener Parameter:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma x &= u_3^3 \cdot P_{\Sigma l+\Sigma m+p+q-1} \\
&+ 2\prod_{i=1}^{p}(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1} \cdot [2b(u_1 u_2 - u_3^2) + ci(u_2 - u_1)u_3] \\
\sigma y &= i u_3^3 \cdot Q_{\Sigma l+\Sigma m+p+q-1} \\
&+ 2\prod_{i=1}^{p}(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1} \cdot [2a(u_1 u_2 - u_3^2) - c(u_1 + u_2)u_3] \\
\sigma z &= u_3^2 \cdot R_{\Sigma l+\Sigma m+p+q} \\
&+ 4u_3 \cdot \prod_{i=1}^{p}(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1} \cdot [(ai - b)u_1 - (ai + b)u_2] \\
\sigma t &= (u_1 u_2 + u_3^2) \cdot \prod_{i=1}^{p}(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1}.
\end{aligned}\right.$$

Nun ist für folgende Punkte der (u_1, u_2, u_3)-Ebene gleichzeitig $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ t = 0$:

$$u_1 = 0,\ u_3 = 0; \qquad u_2 = 0,\ u_3 = 0;$$
$$u_1 - a_r u_3 = 0,\ u_2 - b_s u_3 = 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots p;\ s = 1, 2, \ldots q).$$

Durch das Grenzverfahren, das Clebsch in der oben zitierten Arbeit angegeben hat, überzeugt man sich, daß den beiden ersten

[1]) Vgl. Clebsch, „Über die Abbildung algebraischer Flächen". Math. Ann. I, S. 254.

Punkten im Endlichen gelegene Kurven der Fläche entsprechen. Dagegen ergibt sich, daß dem Punkt

$$u_1 = a_r u_3, \qquad u_2 = b_s u_3$$

nur ein Punkt in der unendlich fernen Ebene entspricht. Setzt man nämlich

$$u_1 = a_r u_3 + \varepsilon \varkappa, \qquad u_2 = b_s u_3 + \varepsilon \lambda,$$

wo also jetzt $\varkappa$, λ, u_3 die neuen Parameter sind, so hat man die niederste Potenz von ε zu suchen, durch sie zu dividieren und dann $\varepsilon = 0$ zu setzen. Zunächst ergibt sich für x und t (die ganz ähnlich wie x gebildeten Ausdrücke für y und z mögen unterdrückt werden):

$$
\begin{aligned}
\sigma x = {} & u_3^3 \Big\{ [(a_r + b_s) u_3 + \varepsilon(\varkappa + \lambda)] \\
& \cdot \Big[(\varepsilon\lambda)^{m_s+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}{}' ((b_s - b_i) u_3 + \varepsilon\lambda)^{m_i+1} \cdot S_{\Sigma l+p-2} \\
& + (\varepsilon\varkappa)^{l_r+1} \cdot \prod_{i=1}^{p}{}' ((a_r - a_i) u_3 + \varepsilon\varkappa)^{l_i+1} \cdot T_{\Sigma m+q-2} \Big] \\
& - 2\varepsilon^2 \varkappa\lambda \cdot \prod_{i=1}^{p}{}' ((a_r - a_i) u_3 + \varepsilon\varkappa) \cdot \prod_{i=1}^{q}{}' ((b_s - b_i) u_3 + \varepsilon\lambda) \\
& \cdot \Big[(\varepsilon\lambda)^{m_s} \cdot \prod_{i=1}^{q}{}' ((b_s - b_i) u_3 + \varepsilon\lambda)^{m_i} \cdot S_{\Sigma l-1} + (\varepsilon\varkappa)^{l_r} \cdot \prod_{i=1}^{p}{}' ((a_r - a_i) u_3 + \varepsilon\varkappa)^{l_i} \cdot T_{\Sigma m-1} \Big] \Big\} \\
& + 2\varepsilon^{l_r+m_s+2} \varkappa^{l_r+1} \lambda^{m_s+1} \cdot \prod_{i=1}^{p}{}' ((a_r - a_i) u_3 + \varepsilon\varkappa)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}{}' ((b_s - b_i) u_3 + \varepsilon\lambda)^{m_i+1} \\
& \cdot [2b((a_r u_3 + \varepsilon\varkappa)(b_s u_3 + \varepsilon\lambda) - u_3^2) + ci((b_s - b_r) u_3 + \varepsilon(\lambda - \varkappa)) u_3]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$\sigma y = \cdots$$

$$\sigma z = \cdots$$

$$
\sigma t = [(a_r u_3 + \varepsilon\varkappa)(b_s u_3 + \varepsilon\lambda) + u_3^2] \varepsilon^{l_r+m_s+2} \varkappa^{l_r+1} \lambda^{m_s+1} \cdot \prod_{i=1}^{p}{}' ((a_r - a_i) u_3 + \varepsilon\varkappa)^{l_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}{}' ((b_s - b_i) u_3 + \varepsilon\lambda)^{m_i+1}.
$$

Die niederste Potenz von ε ist bei x, y, z die $(m_s+1)^{\text{te}}$ unter der Voraussetzung $l_r \geq m_s$, bei t die $(l_r + m_s + 2)^{\text{te}}$. Nun ist der in $\varkappa$ und λ veränderliche Faktor von ε^{m_s+1} bei x, y und z derselbe und zwar sowohl wenn $l_r > m_s$ wie auch wenn $l_r = m_s$ ist, was daher

rührt, daß in allen drei Formeln (6) S. 7 der Faktor $f'(u) + \varphi'(v)$ vorkommt. Daher ergibt sich, wenn man durch ε^{m_s+1} dividiert und dann $\varepsilon = 0$ setzt, nur ein Punkt in der unendlich fernen Ebene, ein Resultat, das nicht befriedigend ist.

Da dieser Fall noch nicht untersucht zu sein scheint, so möge hier für eine beliebige algebraische Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$\varrho\, x_i = f_i(u_1,\ u_2,\ u_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben ist, wo die f_i homogene Funktionen n^{ten} Grades von u_1, u_2, u_3 sind, erörtert werden, wie man die dem Bildpunkt entsprechende Kurve erhält. Für

$$u_1 = a_1 u_3, \qquad u_2 = a_2 u_3$$

mögen dann alle f_i sowie sämtliche $r-1$ ersten Differentialquotienten der f_i nach u_1 und u_2 verschwinden. Setzt man

$$u_1 = a_1 u_3 + \varepsilon \varkappa, \qquad u_2 = a_2 u_3 + \varepsilon \lambda$$

und entwickelt nach Potenzen von ε, so erhält man (vgl. Clebsch, a. a. O.) in symbolischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \sigma x_i = {} & \varepsilon^r \left(\overline{\frac{\partial f_i}{\partial u_1}} \varkappa + \overline{\frac{\partial f_i}{\partial u_2}} \lambda \right)^{(r)} u_3^{n-r} \\ & + \frac{\varepsilon^{r+1}}{r+1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \varkappa + \overline{\frac{\partial f_i}{\partial u_2}} \lambda \right)^{(r+1)} u_3^{n-r-1} \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Die Striche über den Differentialquotienten sollen andeuten, daß sie für $u_1 = a_1 u_3$, $u_2 = a_2 u_3$ zu bilden sind, wobei dann u_3 in einer gewissen Potenz heraustritt. Nun sei der Faktor von ε^r, soweit er von $\varkappa$ und λ abhängt, für alle i derselbe, es sei also:

$$\overline{\frac{\partial^r f_1}{\partial u_1^r}} = \sigma_1 \overline{\frac{\partial^r f_2}{\partial u_1^r}} = \sigma_2 \overline{\frac{\partial^r f_3}{\partial u_1^r}} = \sigma_3 \overline{\frac{\partial^r f_4}{\partial u_1^r}}$$

$$\overline{\frac{\partial^r f_1}{\partial u_1^{r-1}\, \partial u_2}} = \sigma_1 \overline{\frac{\partial^r f_2}{\partial u_1^{r-1}\, \partial u_2}} = \sigma_2 \overline{\frac{\partial^r f_3}{\partial u_1^{r-1}\, \partial u_2}} = \sigma_3 \overline{\frac{\partial^r f_4}{\partial u_1^{r-1}\, \partial u_2}}$$

. . . . . .

Die folgende Untersuchung muß auch vorgenommen werden, wenn dies nur für drei der Koordinaten gilt, während die vierte wie in unserem Fall mit einer höheren Potenz von ε beginnt.

Wir denken uns den Faktor von ε^r in seine Faktoren zerlegt, die zunächst alle voneinander verschieden seien:

$$\left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_1}\varkappa + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\lambda\right)^{(r)} = \frac{\partial^r f_i}{\partial u_1^r}(\varkappa - \alpha_1\lambda)(\varkappa - \alpha_2\lambda)\ldots(\varkappa - \alpha_r\lambda).$$

Dem Punkt $u_1 = a_1 u_3$, $u_2 = a_2 u_3$ entspricht im Parametersystem $\varkappa$, λ, u_3 der Punkt $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$. Wir gehen nun in diesen Punkt gerade in den r-Richtungen hinein, die durch

$$\left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_1}\varkappa + \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_2}\lambda\right)^{(r)} = 0$$

gegeben sind. Wir setzen aber nicht direkt $\varkappa - a_i\lambda = 0$, was wieder einen Punkt geben würde, sondern lassen $\varkappa - a_i\lambda$ von derselben Ordnung wie ε Null werden, indem wir setzen:

$$\varkappa - a_i\lambda = \varepsilon u_3.$$

Dadurch wird erreicht, daß die niederste Potenz von ε die $(r+1)^{\text{te}}$ wird, so daß auch der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_1}\varkappa + \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_2}\lambda\right)^{(r+1)},$$

der nicht mehr für alle vier Koordinaten derselbe sein soll, zur Geltung kommt. So ergibt sich für $\varkappa - \alpha_1\lambda = \varepsilon u_3$:

$$\sigma x_i = \varepsilon^{r+1}\frac{\partial^r \overline{f_i}}{\partial u_1^r}[(\alpha_1-\alpha_2)\lambda+\varepsilon u_3][(\alpha_1-\alpha_3)\lambda+\varepsilon u_3]\ldots[(\alpha_1-\alpha_r)\lambda+\varepsilon u_3]u_3^{n-r+1}$$
$$+\frac{\varepsilon^{r+1}}{r+1}\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_1}(\alpha_1\lambda+\varepsilon u_3)+\frac{\partial \overline{f_i}}{\partial u_2}\lambda\right]^{(r+1)}u_3^{n-r-1}$$
$$+\varepsilon^{r+2}(\ldots)+\ldots$$

oder

$$\sigma' x_i = A_i^{(1)}u_3^2 + B_i^{(1)}\lambda^2$$

oder

$$\sigma'' x_i = A_i^{(1)} + B_i^{(1)}t.$$

Es ergeben sich also r-Gerade, also in der Tat eine Kurve r^{ter} Ordnung, wie der Satz von Clebsch verlangt. Es ist jetzt auch klar, warum hiezu nicht das gewöhnliche Grenzverfahren führen konnte, weil eben eine zerfallende Kurve nicht durch eine Parameterdarstellung erhalten werden kann.

Sind zwei von den Wurzeln α_i einander gleich, etwa $\alpha_1 = \alpha_2$, so rücken die beiden α_1 und α_2 entsprechenden Geraden in eine doppelt zählende Gerade zusammen. Zur analytischen Darstellung dieser Geraden setzen wir jetzt:

$$(\varkappa - \alpha_1 \lambda)^2 = \varepsilon u_3^2,$$

um zu erreichen, daß das r^{te} und $(r+1)^{\text{te}}$ Glied in der Entwicklung von x_i dieselbe Potenz von ε enthalten. Dann ergibt sich:

$$\sigma' x_i = A_i u_3^3 + B_i \lambda^3 \quad \text{oder} \quad \sigma'' x_i = A_i + B_i t.$$

Bei einer k-fachen Wurzel hat man dann entsprechend zu setzen:

$$(\varkappa - \alpha_1 \lambda)^k = \varepsilon u_3^k$$

und bekommt eine k-fache Gerade der Fläche.

Satz: Bei der Parameterdarstellung einer algebraischen Fläche entspricht einem r-fachen Fundamentalpunkt $u_1 = a_1 u_3$, $u_2 = a_2 u_3$ der durch die Parameter vermittelten Abbildung auf die Ebene eine Kurve r^{ter} Ordnung, die im allgemeinen dadurch erhalten wird, daß man $u_1 = a_1 u_1 + \varepsilon \varkappa$, $u_2 = a_2 u_3 + \varepsilon \lambda$ setzt, durch die niederste — r^{te} — Potenz von ε dividiert und dann $\varepsilon = 0$ setzt. Ergibt sich jedoch dabei nur ein Punkt, so hat man folgendermaßen zu verfahren: Man zerlege den Faktor der niedersten Potenz von ε in seine Faktoren

$$(\varkappa - \alpha_1 \lambda)(\varkappa - \alpha_2 \lambda) \ldots (\varkappa - \alpha_r \lambda)$$

und setze der Reihe nach

$$\varkappa = \alpha_1 \lambda + \varepsilon u_3, \quad \varkappa = \alpha_2 \lambda + \varepsilon u_3, \quad \ldots \quad \varkappa = \alpha_r \lambda + \varepsilon u_3$$

und verfahre wieder wie oben. Sind die Wurzeln α_1, α_2, $\ldots$ α_r alle voneinander verschieden, so entsprechen dem fraglichen Punkt r Gerade. Tritt eine Wurzel k-fach auf, so entspricht ihr eine k-fache Gerade.

Dies gilt natürlich auch für eine Cremona-Transformation einer Ebene auf eine andere, wenn i nur die Werte 1, 2, 3 annimmt.

Nach dieser Einschaltung machen wir nun die Anwendung auf unsere Mittelfläche. Hier sind die beiden Fälle $l_r \gtrless m_s$ und $l_r = m_s$ zu unterscheiden.

Im ersten Fall sei dann $l_r > m_s$. Dann ist in (11) der Faktor der niedrigsten Potenz von ε — nämlich ε^{m_s+1} — im wesentlichen

λ^{m_s+1}. Nach dem Obigen entspricht dann dem Punkt $u_1 = a_r u_3$, $u_2 = b_s u_3$ eine $(m_s + 1)$-fache Gerade, die man in Parameterdarstellung erhielte, wenn man

$$\lambda^{m_s+1} = \varepsilon u_3^{m_s+1}$$

setzte. Die niederste Potenz von ε wird dann die $(m_s + 2)^{\text{te}}$ und bei σt bleibt nach Division durch ε^{m_s+2} noch ε^{l_r+1} stehen. Daraus folgt, daß die Gerade für den Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der Fläche $(l_r + 1)(m_s + 1)$-fach zählt. Da diese Zahl ganz symmetrisch in l_r und m_s ist, so hätte sich dasselbe ergeben, wenn $l_r < m_s$ vorausgesetzt worden wäre.

Ist dagegen $l_r = m_s$, so ist in (11) der Faktor der niedersten Potenz von ε wegen (8) (abgesehen von konstanten Faktoren):

$$A_{r\,l_r} \lambda^{l_r+1} + B_{s\,m_s} \varkappa^{l_r+1}.$$

Dies gibt gleich Null gesetzt $l_r + 1$ verschiedene Werte von $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Demnach besteht die Kurve aus $l_r + 1$ Geraden. Setzt man

$$\varkappa = \sqrt[l_r+1]{-\frac{A_{r\,l_r}}{B_{s\,m_s}}} \cdot \lambda + \varepsilon u_3$$

und dividiert durch ε^{l_r+2}, so bleibt bei σt der Faktor

$$\varepsilon^{m_s} = \varepsilon^{l_r},$$

d. h. jede der $l_r + 1$ Geraden zählt für den Schnitt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene l_r mal, alle zusammen also $l_r(l_r + 1)$ mal.

Nun ergibt sich als Ordnung n der gesamten unendlich fernen Kurve und also auch der Fläche die Zahl (vgl. S. 26):

$$n = 2(\Sigma l + \Sigma m + p + q + 1)$$

$$(12) \qquad + \sum_{\substack{i=1 \\ l_i \neq m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ l_i = m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} l_i (m_k + 1).$$

Die vorausgehenden Untersuchungen können in die Sätze zusammengefaßt werden: Die unendlich ferne Kurve der Mittelfläche besteht aus der Kurve $1 + uv = 0$, von der Ordnung $\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2$, ferner aus den Tangenten des Kugelkreises in den unendlich fernen Punkten der beiden Minimalkurven, die durch $u = a_i$ und $v = b_i$ dargestellt werden,

und drittens aus Geraden, die den Punkten $u = a_i$, $v = b_k$ entsprechen. Ist dabei $l_i \gtrless m_k$, so entspricht dem Punkt eine (m_k+1)- bzw. (l_i+1)-fache Gerade der Fläche; ist aber $l_i = m_k$, so entsprechen ihm l_i+1 Gerade. Als Ordnung der Mittelfläche ergibt sich die in (12) angegebene Zahl.

§ 5. Neue Bestimmung der Ordnung der Fläche.

Wir wollen nun zur Kontrolle die Ordnung der Fläche noch auf eine allgemeinere Methode bestimmen, die auch bei der Bestimmung der Klasse und des Ranges Verwendung finden wird, indem wir die Zahl der Schnittpunkte der durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 t &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 t &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

gegebenen Geraden mit der Fläche aufsuchen. Denkt man sich die Werte (10) für x, y, z, t in (13) eingesetzt, so stellen sie zwei ebene Kurven von der Ordnung $\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2$ in einem homogenen Koordinatensystem (u_1, u_2, u_3) dar und die Zahl ihrer Schnittpunkte ist gleich der Ordnung der Fläche. Dabei ist aber von $(\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2)^2$ die Zahl derjenigen Schnittpunkte abzuziehen, welche in die schon bestimmten Fundamentalpunkte der durch die Parameter vermittelten Abbildung auf die Ebene fallen.

Die Punkte $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ und $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ sind für alle vier Kurven

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0$$

und daher auch für die Kurven (13) mehrfache Punkte. Da die höchste Potenz, in der u_2 in (13) vorkommt, $\Sigma m + q + 1$ ist, so ist die Vielfachheit des ersteren Punktes $\Sigma l + p + 1$. Folglich sind in ihm $(\Sigma l + p + 1)^2$ Schnittpunkte der beiden Kurven (13) und im Punkt $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ $(\Sigma m + q + 1)^2$ Schnittpunkte vereinigt.

Auch der Punkt $u_1 = a_r u_3$, $u_2 = b_s u_3$ ist auf jeder der Kurven (13) ein mehrfacher Punkt. Um den Grad der Vielfachheit dieses Punktes zu finden, denken wir uns

$$u_1 - a_r u_3 = v_1, \quad u_2 - b_s u_3 = v_2, \quad u_3 = v_3$$

gesetzt und haben dann die höchste Potenz von v_3 zu suchen. Aus den ganz ähnlichen Untersuchungen auf S. 28 ergibt sich, daß er

ein (m_s+1)-facher Punkt ist, wenn wieder $l_r > m_s$ ist. Ferner findet man, daß in jeder der Gleichungen (13) die höchste Potenz von v_3, abgesehen von einem konstanten Faktor, mit $v_2^{m_s+1}$ multipliziert ist. Die sämtlichen Tangenten fallen also in die Gerade $v_2 = 0$ zusammen. Um das Verhalten in diesem Punkte noch näher zu studieren, denken wir uns die erste der Gleichungen (13) nach Potenzen von v_3 geordnet. Dann sind die ersten Glieder der Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathsf{A}_1 v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-m_s+1} \cdot v_2^{m_s+1} \\ & + \mathsf{B}_1 v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-m_s} \cdot v_2^{m_s+1} (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \\ & + \cdots + \mathit{\Delta}_1 v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-l_r+2} \cdot v_2^{m_s+1} (\lambda_1 v_1^{l_r-m_s-1} + \lambda_2 v_1^{l_r-m_s-2} v_2 + \cdots) \\ & + \mathsf{M}_1 v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-l_r+1} (\mu_1 v_1^{l_r+1} + \mu_2 v_1^{l_r} v_2 + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

Schneidet man diese Kurve mit der Geraden $v_2 = 0$, so tritt $v_1^{l_r+1}$ heraus, d. h. im Punkte $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ hat die Gerade $v_2 = 0$ mit der Kurve l_r+1 Punkte gemein. Da der Punkt ein (m_s+1)-facher ist, so ist das Zusammenfallen von m_s+1 Punkten erklärt; die übrigen $l_r - m_s$ Punkte entstehen dadurch, daß die Tangente $v_2 = 0$ eine $(l_r - m_s - 1)$-fache Tangente, deren Berührungspunkte alle zusammengerückt sind, d. h. eine stationäre Tangente höherer Art ist. Diese Eigenschaft hat übrigens jede der m_s+1 (tatsächlich vereinigten) Tangenten im Punkte $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, was man daraus erkennt, daß der Faktor $v_2^{m_s+1}$ bei allen Gliedern bis zu dem Faktor von $v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-l_r+1}$ exkl. auftritt. Da nun auch die zweite Kurve (13) in m_s+1 Zweigen durch den Punkt geht und jeder dieser Zweige die erste Kurve in l_r+1 Punkten schneidet, so muß er für $(m_s+1)(l_r+1)$ Schnittpunkte zählen.

Anders liegen jedoch die Verhältnisse, wenn $l_r = m_s$ ist. Alsdann ist $v_3^{\Sigma l+\Sigma m+p+q-l_r+1}$, abgesehen von einem konstanten Faktor, multipliziert mit

$$A_{r\,l_r} v_2^{l_r+1} + B_{s\,m_s} v_1^{l_r+1},$$

d. h. die Tangenten des (l_r+1)-fachen Punktes sind alle voneinander verschieden, aber für beide Kurven dieselben. Daher zählt der Punkt $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ in diesem Fall für $(l_r+1)(m_s+2)$ Schnittpunkte.

Somit ergibt sich als Ordnung der Fläche:

$$n = (\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2)^2 - (\Sigma l + p + 1)^2 + (\Sigma m + q + 1)^2$$
$$- \sum_{\substack{i=1 \\ l_i \neq m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) - \sum_{\substack{i=1 \\ l_i = m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 2)$$
$$= 2(\Sigma l + p + 1)(\Sigma m + q + 1) - \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

wo also

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) \quad \text{für } l_i \neq m_k \tag{14}$$

und

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 2) \quad \text{für } l_i = m_k \tag{15}$$

ist. Die gefundene Zahl ist mit der in (12) angegebenen identisch. Denn nach dem Obigen ist

$$n = 2(\Sigma l + \Sigma m + p + q + 1) + 2(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) - \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

so daß der erste Teil schon mit (12) übereinstimmt. Der zweite Teil ist:

$$2(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 2 \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) - \Sigma_1 - \Sigma_2$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) - \Sigma^*(m_k + 1),$$

wo die mit einem Stern bezeichnete Summe für alle Kombinationen $l_i m_k$ zu bilden ist, für die $l_i = m_k$ ist. Nun kann man noch schreiben:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) - \Sigma^*(m_k + 1)$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ l_i \neq m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ l_i = m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} l_i (m_k + 1),$$

womit n auf die früher erhaltene Form gebracht ist. Benutzt man nach (1) S. 8 die Rangzahlen der beiden Minimalkurven, so kann man auch schreiben:

$$n = 2(R_1 - 1)(R_2 - 1) - \Sigma_1 - \Sigma_2. \tag{16}$$

§ 6. Klasse der Mittelfläche.

Zur Bestimmung der Klasse der Mittelfläche müssen wir in die Gleichung der Tangentialebene (Gleichung (3) S. 17) die Werte von $f(u)$ und $\varphi(v)$ einsetzen. Wir benutzen wieder homogene Parameter u_1, u_2, u_3 und außer den in (8) eingeführten Abkürzungen noch die folgende:

$$S_{\Sigma l+2p-3} = \sum_{i=1}^{p} \Big\{ \prod_{k=1}^{p}{}' (u_1 - a_k u_3)^{l_k+2} \cdot [(l_i+1) l_i A_{i\,l_i} u_3^{l_i-1} + l_i (l_i-1) A_{i,l_i-1} u_3^{l_i-2} (u_1 - a_i u_3) + \cdots + 2 A_{i1} (u_1 - a_i u_3)^{l_i-1}] \Big\} \tag{17}$$

entsprechend $T_{\Sigma m+2q-3}$. Sind U, V, W, P homogene Koordinaten der Tangentialebene, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\varrho U = \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i} \\
&\cdot \{u_3 \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2} \cdot [(u_3^2 - u_1^2) S_{\Sigma l+2p-3} + 2 u_1 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3) S_{\Sigma l+p-2} \\
&- 2 \Pi(u_1 - a_i u_3)^2 S_{\Sigma l-1}] - u_3 \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot [(u_3^2 - u_1^2) T_{\Sigma m+2q-3} \\
&+ 2 u_2 \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3) \cdot T_{\Sigma m+q-2} - 2 \Pi(u_2 - b_i u_3)^2 T_{\Sigma m-1}] \\
&- 8 a i \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2}\}; \\
&\varrho V = i \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i} \\
&\cdot \{u_3 \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2} \cdot [(u_1^2 + u_3^2) S_{\Sigma+2p-3} - 2 u_1 \Pi(u_1 - a_i u_3) \cdot S_{\Sigma l+p-2} \\
&+ 2 \Pi(u_1 - a_i u_3)^2 S_{\Sigma l-1}] + u_3 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot [(u_2^2 + u_3^2) T_{\Sigma m+2q-3} \\
&- 2 u_2 \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3) \cdot T_{\Sigma m+q-2} + 2 \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^2 \cdot T_{\Sigma m-1}] \\
&+ 8 b \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2}\}; \\
&\varrho W = 2 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i} \\
&\cdot \{u_3^2 \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2} \cdot [u_1 S_{\Sigma l+2p-3} - \Pi(u_1 - a_i u_3) \cdot S_{\Sigma l+p-2}] \\
&- u_3^2 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot [u_2 T_{\Sigma m+2q-3} - \Pi(u_2 - b_i u_3) \cdot T_{\Sigma m+q-2}] \\
&- 2 c i \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2}\}; \\
&\varrho P = -2 u_3^4 \{\Pi(u_2 - b_i u_3)^{2(m_i+1)} \cdot (S_{\Sigma l+p-2}^2 - 2 S_{\Sigma l-1} \cdot S_{\Sigma l+2p-3}) \\
&- \Pi(u_1 - a_i u_3)^{2(l_i+1)} \cdot (T_{\Sigma m+q-2}^2 - 2 T_{\Sigma m-1} \cdot T_{\Sigma m+2q-3})\} \\
&+ 4 i u_3 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i} \cdot \{\Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+2} \\
&\cdot [S_{\Sigma l+2p-3} \cdot (a(u_3^2 - u_1^2) - b i (u_1^2 + u_3^2) + c u_1 u_3) + \Pi(u_1 - a_i u_3) \\
&\cdot S_{\Sigma l+p-2} \cdot (2 u_1 (a + b i) - c u_3) - 2 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3)^2 \cdot S_{\Sigma l-1} (a + b i)] \\
&+ \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2} \cdot [T_{\Sigma m+2q-3} \cdot (a(u_3^2 - u_2^2) + b i (u_2^2 + u_3^2) + c u_2 u_3) \\
&+ \Pi(u_2 - b_i u_3) T_{\Sigma m+q-2} \cdot (2 u_2 (a - b i) - c u_3) - 2 \Pi(u_2 - b_i u_3)^2 \\
&\cdot T_{\Sigma m-1} (a - b i)]\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

In den von u_1, u_3 abhängigen Produkten geht, wie immer, der Index i von 1 bis p, in den von u_2, u_3 abhängigen von 1 bis q. Die Gleichung der Tangentialebene ist dann

$$Ux + Vy + Wz + P = 0,$$

die vom Grade $2(\Sigma l + \Sigma m + p + q)$ in u_1, u_2, u_3 ist.

Da die Klasse einer Fläche gleich der Zahl der Tangentialebenen ist, die durch eine Gerade gehen, so zwingen wir die Tangentialebene durch zwei beliebige Punkte

$$x = A_1, \quad y = B_1, \quad z = C_1 \quad \text{und} \quad x = A_2, \quad y = B_2, \quad z = C_2$$

zu gehen, d. h. wir haben die Zahl der gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 U + B_1 V + C_1 W + P &= 0 \\ A_2 U + B_2 V + C_2 W + P &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

zu bestimmen, wo für U, V, W, P die Ausdrücke (18) einzusetzen sind. Die Gleichungen (19) sind vom Grad $2(\Sigma l + \Sigma m + p + q)$ und wir haben von $4(\Sigma l + \Sigma m + p + q)^2$ die Zahl der Punkte abzuziehen, die auf allen vier Kurven

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad P = 0$$

liegen.

Dazu gehören zunächst wieder die beiden Punkte $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ und $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Da in (19) die höchste Potenz von u_2 $2(\Sigma m + q)$ ist, so ist der Punkt $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ ein $2(\Sigma l + p)$-facher für die Kurven mit den Gleichungen (19). Da im allgemeinen die Tangenten in diesem Punkt bei beiden Kurven nicht zusammenfallen, so zählt er für $4(\Sigma l + p)^2$ und der Punkt $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ für $4(\Sigma m + q)^2$ Schnittpunkte.

Ferner ist der Punkt $u_1 = a_r u_3$, $u_2 = b_s u_3$ Fundamentalpunkt. Denken wir uns wieder

$$u_1 - a_r u_3 = v_1, \qquad u_2 - b_s u_3 = v_2, \qquad u_3 = v_3$$

gesetzt, so ist die höchste vorkommende Potenz von v_3, die in ϱP zu suchen ist:

$$2(\Sigma l + \Sigma m + p + q - m - 1),$$

sofern wieder $l_r > m_s$ ist, und der Punkt ist $2(m_s + 1)$-fach. Die höchste Potenz von v_3 ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, multipliziert mit $v_2^{2(m_s+1)}$. Alle Tangenten des vielfachen Punktes

fallen daher in die Gerade $v_2 = 0$ und zwar gilt dies für beide Kurven (19). Denkt man sich wieder beide Gleichungen (19) nach fallenden Potenzen von v_3 geordnet, so haben die höchsten Potenzen u. a. den Faktor $v_2^{2(m_s+1)}$ und die erste, die ihn nicht mehr hat, ist:

$$v_3^{2(\Sigma l+\Sigma m+p+q-l_r-1)} \cdot (\gamma_1 v_1^{2(l_r+1)} + \gamma_2 v_1^{2l_r+1} v_2 + \cdots).$$

Schneidet man also eine der Kurven (19) mit der Geraden $v_2 = 0$, so tritt der Faktor $v_1^{2(l_r+1)}$ heraus, d. h. die Gerade trifft im Punkte $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ $2(l_r + 1)$ vereinigte Punkte der Kurve. Da dieser Punkt außerdem ein $2(m_s + 1)$-facher für beide Kurven ist und jeder Zweig der zweiten Kurve die erste in $2(l_r + 1)$ vereinigten Punkten schneidet, so zählt er für $4(m_s + 1)(l_r + 1)$ Schnittpunkte.

Ist aber $l_r = m_s$, so ist der Faktor der höchsten Potenz von v_3:

$$A_{r\,l_r}^2 v_2^{2(l_r+1)} - B_{s\,m_s}^2 v_1^{2(l_r+1)}$$
$$= (A_{r\,l_r} v_2^{l_r+1} + B_{s\,m_s} v_1^{l_r+1})(A_{r\,l_r} v_2^{l_r+1} - B_{s\,m_s} v_1^{l_r+1}).$$

Die Tangenten des $2(l_r + 1)$-fachen Punktes sind daher von einander verschieden, für beide Kurven aber dieselben. Daher zählt der Punkt für $2(l_r + 1)(2m_s + 3)$ Schnittpunkte.

Die Gleichung (2) S. 16 lehrt, daß auch etwaige Schnittpunkte der beiden Minimalkurven die vier Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad P = 0$$

befriedigen. Ist ihre Anzahl D, so erniedrigt sich die Klasse der Fläche um D.

Darnach ergibt sich als Klasse der Mittelfläche:

$$n' = 4(\Sigma l + \Sigma m + p + q)^2 - 4(\Sigma l + p)^2 - 4(\Sigma m + q)^2$$
$$- 4 \sum_{\substack{i=1 \\ l_i \neq m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(m_k + 1) - 2 \sum_{\substack{i=1 \\ l_i = m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(2m_k + 3) - D$$

oder wegen (14) und wenn

$$(20) \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ l_i = m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(2m_k + 3) = \Sigma_3$$

gesetzt wird:

$$n' = 8(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) - 4\Sigma_1 - 2\Sigma_3 - D$$

oder wenn man den Rang der beiden Minimalkurven einführt:

$$n' = 8(R_1 - 2)(R_2 - 2) - 4\Sigma_1 - 2\Sigma_3 - D. \tag{21}$$

Die beiden Minimalkurven haben insbesondere dann mindestens einen gemeinsamen Punkt, wenn $a = b = c = 0$ ist. Denn dann werden die Gleichungen (3) S. 6 in homogener Darstellung:

$$\varrho x = u_3\{(u_3^2 - u_1^2) S_{\Sigma l+2p-3} + 2u_1 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3) \cdot S_{\Sigma l+p-2} - 2\Pi(u_1 - a_i u_3)^2 \cdot S_{\Sigma l-1}\}$$

$$\varrho y = i u_3\{(u_1^2 + u_3^2) S_{\Sigma l+2p-3} - 2u_1 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3) \cdot S_{\Sigma l+p-2} + 2\Pi(u_1 - a_i u_3)^2 \cdot S_{\Sigma l-1}\}$$

$$\varrho z = 2u_3^2\{u_1 S_{\Sigma l+2p-3} - \Pi(u_1 - a_i u_3) \cdot S_{\Sigma l+p-2}\}$$

$$\varrho t = \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+2}.$$

$u_3 = 0$ gibt den Anfangspunkt und durch denselben Punkt geht die konjugiert komplexe Minimalkurve. Wie man aus (18) sieht, vermindert sich jetzt der Grad der beiden Gleichungen (19) um 1. Führt man dann dieselbe Betrachtung wie oben durch, so findet man als Klasse der Fläche:

$$8(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) - 4\Sigma_1 - 2\Sigma_3 - 1.$$

Diese Zahl ist um 1 kleiner als die in (21) angegebene, dem Umstand entsprechend, daß die beiden Minimalkurven einen Punkt gemein haben.

§ 7. Rang der Mittelfläche.

Unter dem Rang einer Fläche versteht man bekanntlich die Klasse einer ebenen Schnittkurve oder, was dasselbe ist, die Ordnung des Tangentenkegels aus einem Punkt. Ist die Spitze des Kegels der Punkt mit den Koordinaten:

$$\varkappa x = A_1, \quad \varkappa y = B_1, \quad \varkappa z = C_1, \quad \varkappa t = D_1,$$

so ist die Gleichung der Berührungskurve mit der Fläche in den Parametern u_1, u_2, u_3:

$$A_1 U + B_1 V + C_1 W + D_1 P = 0, \tag{22}$$

wo U, V, W, P nach (18) die Koordinaten der Tangentialebene sind. Da nun die Ordnung dieser Kurve gleich der des Kegels ist, so ist die Zahl der Schnittpunkte einer beliebigen Ebene

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 t = 0 \tag{23}$$

mit der Berührungskurve des Kegels die gesuchte Zahl. Nun ist der Grad der Gleichung (22) nach S. 37

$$2(\Sigma l + \Sigma m + p + q)$$

und der der Gleichung (23), wenn darin nach (9) x, y, z, t eingesetzt werden, nach S. 33

$$\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2.$$

Die durch (22) und (23) dargestellten Kurven haben zunächst wieder die Punkte $u_1 = 0,\ u_3 = 0$ und $u_2 = 0,\ u_3 = 0$ gemeinsam. Der erste Punkt ist $2(\Sigma l + p)$-fach für die erste und $(\Sigma l + p + 1)$-fach für die zweite Kurve (siehe S. 37 und S. 33). Da die Tangenten in diesem Punkt für beide Kurven verschiedene sind, so zählt er für $2(\Sigma l + p)(\Sigma l + p + 1)$ Schnittpunkte. Entsprechendes gilt für den Punkt $u_2 = 0,\ u_3 = 0$.

Ferner liegt der Punkt $u_1 = a_r u_3,\ u_2 = b_s u_3$ auf beiden Kurven und zwar sei wieder $l_r > m_s$. Dann ist er auf der ersten Kurve $2(m_s + 1)$-fach, auf der zweiten $(m_s + 1)$-fach und die Gerade $v_2 = 0$ hat mit der ersten $2(l_r + 1)$, mit der zweiten $l_r + 1$ im Punkte $v_1 = 0,\ v_2 = 0$ vereinigte Punkte gemein (vgl. S. 38 und S. 34). Da man die Zerlegung machen kann:

$$\begin{aligned} 2(l_r + 1) &= 2(m_s + 1) + 2(l_r - m_s) \\ l_r + 1 &= (m_s + 1) + (l_r - m_s), \end{aligned}$$

so schneidet jeder Zweig der zweiten Kurve im singulären Punkt die erste Kurve in

$$2(m_s + 1) + (l_r - m_s) = l_r + m_s + 2$$

Punkten. Daher zählt der Punkt für $(m_s + 1)(l_r + m_s + 2)$ Schnittpunkte. Wir haben daher von dem Produkt der Gradzahlen der Gleichungen (22) und (23) weiter zu subtrahieren:

$$\Sigma_4 = \sum_{\substack{i=1 \\ l_i < m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (l_i + 1)(l_i + m_k + 2) \tag{24}$$

und

$$\Sigma_5 = \sum_{\substack{i=1 \\ l_i > m_k}}^{p} \sum_{k=1}^{q} (m_k + 1)(l_i + m_k + 2). \tag{25}$$

Ist dagegen $l_r = m_s$, so sind die Tangenten an die Kurve (22) gegeben durch (s. S. 38):

$$(A_{r\,l_r}\, v_2^{l_r+1} + B_{s\,m_s}\, v_1^{l_r+1})(A_{r\,l_r}\, v_2^{l_r+1} - B_{s\,m_s}\, v_1^{l_r+1}) = 0$$

und an die Kurve (23) durch (s. S. 34):

$$A_{r\,l_r}\, v_2^{l_r+1} + B_{s\,m_s}\, v_1^{l_r+1} = 0.$$

Der Punkt zählt daher für $(l_r + 1)(2\,m_s + 3)$ Schnittpunkte. Dies sind ihrer Zahl nach die schon in (20) eingeführten Σ_3 Punkte.

Daher ergibt sich als Rang der Fläche:

$$\begin{aligned} a &= 2(\Sigma l + \Sigma m + p + q)(\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2) - 2(\Sigma l + p)(\Sigma l + p + 1) \\ &\quad - 2(\Sigma m + q)(\Sigma m + q + 1) - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5 \\ &= 4(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) + 2(\Sigma l + \Sigma m + p + q) - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5 \end{aligned}$$

oder bei Benutzung der Rangzahlen der beiden Minimalkurven:

$$a = 4\,R_1 R_2 - 6(R_1 + R_2) + 8 - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5. \tag{26}$$

§ 8. Ordnung der Doppelkurve der Mittelfläche.

Wir kennen jetzt von den Plückerschen Zahlen des ebenen Schnitts der Fläche drei, nämlich Ordnung n, Klasse a und die Zahl der Rückkehrpunkte (gleich der Ordnung der Rückkehrkurve der Fläche, s. S. 11):

$$c = R_1 R_2 - 2. \tag{27}$$

Ist b die Zahl der Doppelpunkte oder die Ordnung der Doppelkurve der Fläche, so folgt aus der bekannten Plückerschen Formel

$$a = n(n-1) - 2\,b - 3\,c$$

nach (16), (26) und (27):

$$\begin{aligned} 2\,b &= 4\,R_1 R_2 [R_1 R_2 - 2(R_1 + R_2)] + 4(R_1^2 + R_2^2) + 7\,R_1 R_2 \\ &\quad - 4(R_1 R_2 - R_1 - R_2)(\Sigma_1 + \Sigma_2) + (\Sigma_1 + \Sigma_2)(\Sigma_1 + \Sigma_2 - 3) \\ &\quad + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5. \end{aligned} \tag{28}$$

§ 9. Klasse der von den parabolischen Ebenen umhüllten abwickelbaren Fläche.

Setzt man in die Gleichung der parabolischen Kurve (Gleichung (5) S. 11) für $f(u)$ den in (8) S. 7 angegebenen Wert und für $q(v)$ den entsprechenden ein und benutzt wieder homogene Parameter, so erhält man:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{c} \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1} \cdot \{2ci(u_1 u_2 - u_3^2) \\ + 4(ai - b)u_1 u_3 + 4(ai + b)u_2 u_3\} + 2u_3^2 \cdot \Pi(u_1 - a_i u_3) \\ \cdot \Pi(u_2 - b_i u_3) \cdot \{u_2 \Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i} \cdot S_{\Sigma l-1} \\ - u_1 \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i} \cdot T_{\Sigma m-1}\} - u_3^2 (u_1 u_2 + u_3^2)\{\Pi(u_2 - b_i u_3)^{m_i+1} \\ \cdot S_{\Sigma l+p-2} - \Pi(u_1 - a_i u_3)^{l_i+1} \cdot T_{\Sigma m+q-2}\} = 0. \end{array}\right.$$

Nimmt man zu dieser Gleichung die Bedingung hinzu, daß die Tangentialebene durch einen Punkt geht, d. h.:

$$(30)\qquad AU + BV + CW + DP = 0,$$

so ist die Zahl der Schnittpunkte der durch (29) und (30) dargestellten Kurven gleich der Zahl der parabolischen Ebenen der Mittelfläche, die durch einen Punkt gehen. Die erste Gleichung ist vom Grade $\Sigma l + \Sigma m + p + q + 2$, die zweite vom Grade $2(\Sigma l + \Sigma m + p + q)$.

Wieder sind dieselben Punkte wie früher von den Konstanten A, B, C, D unabhängige Schnittpunkte der beiden Kurven und man überzeugt sich, daß die Kurve (29) in diesen Schnittpunkten dieselben Singularitäten hat wie die durch (23) gegebene Kurve, mit dem einzigen Unterschied, daß im Falle $l_r = m_s$ die Tangenten im Punkte $v_1 = u_1 - a_r u_3 = 0$, $v_2 = u_2 - b_s u_3 = 0$ gegeben sind durch

$$A_{r l_r} v_2^{l_r+1} - B_{s m_s} v_1^{l_r+1} = 0.$$

Aber diese Tangenten berühren nach S. 38 ja auch die Kurve (30). Schneiden sich die beiden Minimalkurven nicht, so ist die gesuchte Zahl gleich dem Rang der Fläche. Sind aber solche Schnittpunkte vorhanden, so geht auch die Schnittkurve der Tangentenflächen der beiden Minimalkurven durch sie. Die ihnen entsprechenden Parameterwerte genügen daher den Gleichungen (29) und (30). Man bemerkt übrigens, daß in einem solchen Punkt zwei Zweige der Schnittkurve der Tangentenflächen zusammentreffen, von denen jeder eine Spitze hat. Die Bildkurve (29) in der (u_1, u_2, u_3)-

Ebene hat dann diesen Punkt als Doppelpunkt. Daher ist die Klasse der von den parabolischen Ebenen umhüllten Fläche

$$c' = a - 2D. \tag{31}$$

Ist insbesondere in (29) und (30) $a = b = c = 0$[1]), so verringert sich der Grad von (29) um 2 und der von (30) um 1 und man findet als Klasse der parabolischen Ebenen:

$$4(\Sigma l + p)(\Sigma m + q) + 2(\Sigma l + \Sigma m + p + q) - \Sigma_3 - \Sigma_4 - \Sigma_5 - 2 = a - 2$$

in Übereinstimmung damit, daß für $a = b = c = 0$ die beiden Minimalkurven sicher einen Punkt gemein haben.

Es sei erwähnt, daß man auf diese Weise natürlich auch die Ordnung c der Rückkehrkurve bestimmen kann und dasselbe Resultat wie in (27) findet.

§ 10. Klasse der abwickelbaren Fläche, die von den Doppeltangentialebenen der Mittelfläche umhüllt wird.

Bedeutet b' die Zahl der Doppeltangentialebenen des Tangentenkegels aus einem Punkt an die Fläche, so ist bekanntlich nach Plücker:

$$a = n'(n' - 1) - 2b' - 3c'$$

und nach (21), (26) und (31) berechnet sich daraus:

$$\begin{aligned} 2b' = {} & 64 R_1 R_2 (R_1 R_2 - 4(R_1 + R_2)] + 256(R_1^2 + R_2^2) + 1000 R_1 R_2 \\ & - 984(R_1 + R_2) + 960 - 32(2\Sigma_1 + \Sigma_3)[R_1 R_2 - 2(R_1 + R_2)] \\ & + 4(2\Sigma_1 + \Sigma_3)^2 - 252\Sigma_1 - 122\Sigma_3 + 4(\Sigma_4 + \Sigma_5) + 4D(2\Sigma_1 + \Sigma_3) \\ & - 16D[R_1 R_2 - 2(R_1 + R_2)] + D^2 - 57D. \end{aligned}$$

Damit haben wir Ordnung, Klasse und Rang der Mittelfläche, sowie Ordnung der Doppel- und Rückkehrkurve und Klasse der abwickelbaren Flächen der doppelt berührenden und parabolischen Ebenen bestimmt. Die gefundenen Zahlen lassen sich durch die Rangzahlen der das isotrope Strahlensystem erzeugenden Minimalkurven und

[1]) Es wird wohl keine Verwechslung dieser Konstanten a, b, c mit dem Rang a, der Ordnung der Doppelkurve b und der der Rückkehrkurve c eintreten.

$p = q$	$l_i = m_i$	$\Sigma l = \Sigma m$	O	K	R	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4
1	1	1	3	3	4	0	6	10	0
1	2	2	4	4	5	0	12	21	0
2	$l_1 = l_2 = 1$	2	6	4	6	0	24	40	0
2	$\left\{ \begin{matrix} l_1 = 2 \\ l_2 = 1 \end{matrix} \right\}$	3	7	5	7	12	18	31	10

durch die Summenformeln Σ_1, Σ_2, ... Σ_5 ausdrücken, die von der Form von $f(u)$ und $\varphi(v)$ abhängen. Bei den Plückerschen Zahlen des Tangentenkegels — mit Ausnahme des Ranges der Fläche — kommt außerdem noch die Zahl etwaiger Schnittpunkte der beiden Minimalkurven in Betracht.

In der obenstehenden Tabelle seien die einfachsten Fälle, die zu reellen Flächen führen (also $p = q$ und $l_i = m_i$), zusammengestellt.

Zum ersten Fall gehört als Minimalfläche die nach Enneper benannte[1]), die von der 9. Ordnung und 6. Klasse ist. Die Mittelfläche des hiezu gehörenden isotropen Strahlensystems wird später (im V. Kapitel) näher untersucht werden.

[1]) Darboux, a. a. O. I, S. 371.

Σ_5	n	a	b	c	n'	b'	c'
0	12	14	38	14	$12 - D$	$38 - \frac{D(17-D)}{2}$	$14 - 2D$
0	20	27	142	23	$30 - D$	$381 - \frac{D(53-D)}{2}$	$27 - 2D$
0	26	40	254	34	$48 - D$	$1048 - \frac{D(89-D)}{2}$	$40 - 2D$
10	42	69	756	47	$90 - D$	$7734 - \frac{D(173-D)}{2}$	$69 - 2D$

Kapitel IV.

Die Mittelflächen der zu einer Minimaldoppelfläche gehörenden isotropen Strahlensysteme.

§ 1. Bedeutung der Gleichung $1 + uv = 0$.

Nach S. Lie nennt man eine Minimalfläche, die von den Mitten der Verbindungslinien je zweier Punkte einer Minimalkurve gebildet wird, eine Doppelfläche. Sind

$$\xi = A(u), \qquad \eta = B(u), \qquad \zeta = C(u)$$

die Gleichungen einer Minimalkurve, so ist die zugehörige Minimalfläche gegeben durch:

$$x = \frac{A(u) + A(v)}{2}, \quad y = \frac{B(u) + B(v)}{2}, \quad z = \frac{C(u) + C(v)}{2}.$$

Je zwei Wertepaare $u = a$, $v = b$ und $u = b$, $v = a$ geben denselben Punkt der Minimalfläche. Ebenso gehört zu diesen Parameterwerten auch nur eine Gerade der isotropen Kongruenz als Schnittlinie der Schmiegungsebenen in den Punkten $u = a$ und $u = b$ der Minimalkurve. Daher ist die Mittelfläche dieser Kongruenz auch eine Doppelfläche. Ebenso könnte man sowohl das isotrope Strahlensystem wie das von den Sehnen der Minimalkurve gebildete ein Doppelstrahlensystem nennen. Ist die Minimalkurve eine solche, die mit ihrer konjugierten zusammenfällt, so sind die beiden Strahlensysteme und ihre Mittelflächen reell.

Für die Gleichung der Schmiegungsebene der einen Minimalkurve hat man jetzt die beiden Formen (1) und (2) S. 6. Sie stellen die Schmiegungsebenen einer Kurve dar, wenn f und φ der Gleichung (4) S. 9 genügen. Die Parameter u und v geben denselben Punkt, wenn außerdem $v = -\frac{1}{u}$ ist. Dazu gehört als Gerade des isotropen Strahlensystems die Tangente der Minimalkurve in diesem Punkt als Grenzlage des Schnittes zweier Schmiegungsebenen und der „Mittelpunkt" dieser Geraden ist der Berührungspunkt. Die Gleichung $1 + uv = 0$ bedeutet jetzt also auf der Mittelfläche die gegebene Minimalkurve. Da die Tangente auch die Grenzlage der Sehne ist, so ist sie Normale der Mittelfläche und die Tangentialebene ist die durch sie gehende Minimalebene, d. h. die Schmiegungsebene der Minimalkurve. Dieselbe Ebene ist übrigens auch Tangentialebene der Minimalfläche, so daß sich also Mittel- und Minimalfläche längs der gegebenen Minimalkurve berühren. Die beiden durch jeden Punkt einer Minimalfläche gehenden Minimalkurven fallen hier zusammen und berühren die Kurve $1 + uv = 0$.

Dies läßt sich auch analytisch bestätigen. In der Tat bekommen die rechten Seiten der Gleichungen (6) S. 7 für $v = -\frac{1}{u}$ die Form $\frac{0}{0}$, wenn man noch die aus (4) S. 9 durch Differentiation folgende Gleichung

$$f'(u) + \varphi'\left(-\frac{1}{u}\right) + 2u\varphi\left(-\frac{1}{u}\right) = 0 \tag{1}$$

berücksichtigt. Faßt man auf den rechten Seiten der Gleichungen (6) S. 7 Zähler und Nenner als Funktionen von v auf, die für $v = -\frac{1}{u}$ Null werden, so ergibt sich in bekannter Weise als wahrer Wert wegen (1):

$$x = \xi_2\left(-\frac{1}{u}\right) = \xi_1(u)$$

$$y = \eta_2\left(-\frac{1}{u}\right) = \eta_1(u)$$

$$z = \zeta_2\left(-\frac{1}{u}\right) = \zeta_1(u),$$

wo ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 gemäß den Gleichungen (3) S. 6 als Funktionszeichen aufzufassen sind.

§ 2. Die Rückkehrkurve der Mittelfläche eines isotropen Doppelstrahlensystems.

An die Stelle der Schnittkurve der beiden Brennflächen tritt jetzt die Doppelkurve der Tangentenfläche der Minimalkurve und ihre Rückkehrkante, d. h. die Minimalkurve selbst. In der Tat genügt auch $1 + uv = 0$ der Gleichung (5) S. 11, da ja Gleichung (3) S. 9 erfüllt ist. Sie ist daher für die Mittelfläche Rückkehrkurve und ihre Schmiegungsebene berührt die Fläche, wie schon oben gefunden wurde. Der Kugelkreis ist nur dann Rückkehrkurve der Mittelfläche, wenn die Tangentenfläche der Minimalkurve ihn mehrfach enthält.

Die Ordnung der eigentlichen Doppelkurve der Tangentenfläche der Minimalkurve kann mit Hilfe einer der Cayleyschen Formeln für Raumkurven gefunden werden. Bezeichnet nämlich K die Klasse, R den Rang, O die Ordnung der Minimalkurve, x die Ordnung der Doppelkurve ihrer Tangentenfläche, d die Zahl ihrer Doppelerzeugenden und Θ die ihrer stationären Erzeugenden, so ist[1]):

$$K = R(R-1) - 2(x+d) - 3(O+\Theta).$$

d ist für Minimalkurven Null, da eine Minimalgerade nicht der Schnitt zweier Minimalebenen sein kann, die einen endlichen Winkel einschließen. Ebenso ist nach S. 13 $\Theta = 0$. Daher wird

$$x = \tfrac{1}{2}[R(R-1) - 3O - K]. \tag{2}$$

Die Ordnung der gesamten Rückkehrkurve der Mittelfläche ist dann

$$\tfrac{1}{2}[R(R-1) - O - K].$$

Sind die Funktionen $f(u)$ und $\varphi(v)$ rational, so wird diese Zahl:

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma l + p)(\Sigma l + p + 1).$$

§ 3. Die Mittelflächen der x^3 zu einer Minimaldoppelfläche gehörenden isotropen Strahlensysteme.

Nach Kap. III, § 2 bleibt eine Minimalfläche ungeändert, wenn man die sie erzeugenden Minimalkurven im entgegengesetzten Sinn um dasselbe Stück verschiebt. Insbesondere bleibt eine Minimaldoppelfläche ungeändert, wenn die eine sie erzeugende Minimalkurve nach entgegengesetzten Richtungen um dieselbe Strecke verschoben

[1]) Salmon-Fiedler, a. a. O. II, S. 108.

wird, indem nämlich die von irgend zwei Punkten $u = a$ und $v = b$ der beiden Minimalkurven begrenzte Strecke denselben Mittelpunkt hat wie die Strecke mit den Endpunkten $u = b$ und $v = a$. Dagegen gehören dazu zwei Gerade der isotropen Kongruenz, die zueinander parallel sind. Daher ist die Mittelfläche dieser Kongruenz keine Doppelfläche. Jedem Punkt der Minimaldoppelfläche entsprechen dann zwei Gerade des isotropen Strahlensystems und zwei Punkte seiner Mittelfläche. Das Strahlensystem, das von den Verbindungslinien eines Punktes der Minimalfläche mit den entsprechenden der Mittelfläche der isotropen Kongruenz gebildet wird, hat die Eigenschaft, daß in jedem Punkt einer seiner Brennflächen, nämlich der Minimalfläche, zwei Gerade berühren.

Was die Ordnung und Klasse der Mittelflächen der isotropen Strahlensysteme, die zu Minimaldoppelflächen gehören, betrifft, so ist klar, daß für diejenigen unter ihnen, die nicht Doppelflächen sind, die früheren Zahlen bestehen bleiben. Für die eine Doppelfläche jedoch sind die gefundenen Zahlen für Ordnung, Klasse und Rang im allgemeinen zu halbieren, da z. B. zu jedem Schnittpunkt einer Geraden zwei Parameterwertepaare u, v gehören.

Die Untersuchungen dieses Kapitels führen zu den Sätzen:

Von den ∞^3 isotropen Strahlensystemen, die zu einer Minimaldoppelfläche gehören, hat nur ein einziges die Eigenschaft, daß seine Mittelfläche auch Doppelfläche ist; auf dieser Fläche bedeutet dann die Gleichung $1 + uv = 0$ die gegebene Minimalkurve; für sie und die Doppelkurve ihrer Tangentenfläche gelten dann die Sätze, die früher für die Schnittkurve der Brennflächen des Strahlensystems abgeleitet wurden. Die übrigen ∞^3 isotropen Strahlensysteme sind aus zwei kongruenten, aber nicht zusammenfallenden Minimalkurven abgeleitet und für ihre Mittelfläche behalten die früheren Untersuchungen ihre Geltung.

§ 4. Beispiel.

Die einfachste reelle Minimaldoppelfläche ist die Hennebergsche Minimalfläche, für die $p = 2$, $l_1 = l_2 = 1$, also $\Sigma l = 2$ zu setzen ist[1]). Dies ist der dritte in der Tabelle S. 44 behandelte Fall, in dem die Minimalkurve von der 6. Ordnung, der 4. Klasse und vom

[1]) Darboux, a. a. O. I, S. 372.

6. Rang ist. Die Ordnung der eigentlichen Doppelkurve ihrer Tangentenfläche ist nach (2) vier. Das isotrope Strahlensystem, das von den Schnittlinien der Schmiegungsebenen der Minimalkurve gebildet wird, besteht aus den Erzeugenden von konfokalen Paraboloiden[1]). In der Tat ist diesem System als Schar von Flächen 2. Klasse eine imaginäre, den Kugelkreis enthaltende abwickelbare Fläche von der 4. Klasse umschrieben, welche die Eigenschaft hat, daß durch jede Tangente des Kugelkreises nur eine Tangentialebene der abwickelbaren Fläche geht, so daß also die zugehörige Funktion $f(u)$ rational ist[2]). Daraus folgt dann weiter, daß sie sowohl wie ihre Rückkehrkante von der 6. Ordnung ist. Ferner ist nach S. 12 die Ordnung des Strahlensystems 6, wie es sein muß, da durch jeden Punkt drei Paraboloide gehen, darunter ein hyperbolisches. Von den 6 Geraden des Strahlensystems, die durch einen Punkt gehen, dürfen daher nur zwei reell sein; in der Tat können sich die vier Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt gehen, nur in zwei reellen Geraden schneiden. Für die Klasse des isotropen Strahlensystems ergibt sich, wie zu erwarten, nach S. 13 zwei, da für die Minimalkurve die unendlich ferne Ebene zweimal Schmiegungsebene ist ($p = 2$). Bei konfokalen Flächen sind die Fokalkegelschnitte Doppelkurven der gemeinsamen umschriebenen abwickelbaren Fläche[3]). Dies sind in unserem Fall die beiden Fokalparabeln, die daher Rückkehrkurven der Mittelfläche des isotropen Strahlensystems sind.

Analytisch lassen sich diese Resultate ebenfalls bestätigen. Für die Hennebergsche Minimalfläche kann man setzen[4]):

$$f(u) = \frac{u^4 + 1}{u}.$$

Hiebei hat $f(u)$ nicht die Form (8) S. 7. Die dazu gehörige Minimalkurve ist dargestellt durch

$$\xi = 2\,\frac{(1-u^2)^3}{u^3}, \quad \eta = 2i\,\frac{(1+u^2)^3}{u^3}, \quad \zeta = 6\,\frac{u^4+1}{u^2}.$$

[1]) Vgl. Ribaucour, a. a. O., § 158.

[2]) Dies gilt für das System der konfokalen Mittelpunktsflächen 2. Ordnung nicht. Dieser Fall ist von E. v. Weber in der S. 5 erwähnten Abhandlung untersucht worden.

[3]) G. Salmon, „Analytische Geometrie des Raumes“. I. Teil. Deutsch von W. Fiedler. 4. Aufl. Leipzig 1898, S. 360.

[4]) Scheffers, a. a. O. II, S. 260.

Ferner ergibt sich für die Mittelfläche:

$$x = \frac{u+v}{(1+uv)u^2v^2}\left[u^2v^2(u^2+v^2)+2u^3v^3-(u+v)^2\right]$$

$$(3)\qquad y = i\frac{v-u}{(1+uv)u^2v^2}\left[u^2v^2(u^2+v^2)-2u^3v^3-(u-v)^2\right]$$

$$z = \frac{u^2+v^2}{u^2v^2}(u^2v^2-4uv+1).$$

Die Gleichung (5) S. 11 wird:

$$(1+uv)^3(u+v)(u-v)=0.$$

$1+uv=0$ gibt die Minimalkurve selbst. Für $v=u$ ergibt sich aus (3):

$$x = 8\frac{u^2-1}{u}, \qquad y=0, \qquad z=\frac{2}{u^2}(u^4-4u^2+1).$$

Dies ist in der Tat eine Parabel in der (xz)-Ebene, deren Gleichung ist:

$$x^2-32(z+4)=0.$$

Ebenso gibt $v=-u$ eine Parabel in der (yz)-Ebene mit der Gleichung:

$$y^2+32(z-4)=0.$$

Diese beiden Parabeln sind also reelle Rückkehrkurven auf der Mittelfläche, während die Minimalkurve selbst imaginäre Rückkehrkurve ist.

Kapitel V.

Die Mittelflächen der zur Enneperschen Minimalfläche gehörenden isotropen Strahlensysteme.

§ 1. Die Mittelfläche des zu $f(u) = \frac{u^3}{2}$ und $\varphi(v) = \frac{v^3}{2}$ gehörenden isotropen Strahlensystems.

Die einfachste algebraische Minimalfläche ist die Enneper-sche, von der 9. Ordnung und 6. Klasse, für die $p = q = 1$ und $l = m = 1$ zu setzen ist[1]). Die entsprechende Minimalkurve ist von der 3. Ordnung und Klasse und vom Range 4. Es wäre daher

$$f(u) = \frac{A}{u - a} \quad \text{und} \quad \varphi(v) = \frac{B}{v - b}$$

zu setzen; um jedoch möglichst einfache Formeln zu erhalten, setzen wir mit Darboux[2]):

$$f(u) = \frac{u^3}{2} \quad \text{und} \quad \varphi(v) = \frac{v^3}{2} \tag{1}$$

und betrachten von den ∞^3 Mittelflächen aller isotropen Strahlensysteme, die zu der dadurch bestimmten Minimalfläche gehören, zunächst nur die zu diesen Werten von $f(u)$ und $\varphi(v)$ gehörende. Daß die Formen (1) dasselbe ergeben wie die obige Normalform, läßt sich am schnellsten folgendermaßen einsehen. Die Gleichungen der Schmiegungsebenen der zu (1) gehörenden Minimalkurven sind:

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 2u^3 = 0 \tag{2}$$

$$(1 - v^2)x - i(1 + v^2)y + 2vz + 2v^3 = 0. \tag{3}$$

Setzt man

$$u = -\frac{1}{v} \quad \text{und} \quad v = -\frac{1}{u},$$

[1]) Darboux, a. a. O. I, S. 371. [2]) Ebenda, S. 316.

so werden sie:

$$(1-\bar{v}^2)\,x - i\,(1+v^2)\,y + 2\,\bar{v}\,z + \frac{2}{\bar{v}} = 0$$

$$(1-u^2)\,x + i\,(1+\bar{u}^2)\,y + 2\,\bar{u}\,z + \frac{2}{\bar{u}} = 0.$$

Die Funktionen f und φ sind also jetzt:

$$f(u) = \frac{1}{2\,\bar{u}} \quad \text{und} \quad \varphi(v) = \frac{1}{2\,\bar{v}},$$

haben also die Normalform.

Bei Benutzung von (1) sind die beiden Minimalkurven dargestellt durch:

(4) $\xi_1 = 3u - u^3; \quad \eta_1 = i(3u + u^3); \quad \zeta_1 = 3u^2$

(5) $\xi_2 = 3v - v^3; \quad \eta_2 = -i(3v + v^3); \quad \zeta_2 = 3v^2.$

Dann wird für die Ennepersche Minimalfläche:

$$x = \frac{u+v}{2}(3 - u^2 + uv - v^2)$$

(6) $$y = i\frac{u-v}{2}(3 + u^2 + uv + v^2)$$

$$z = \frac{3}{2}(u^2 + v^2).$$

Die Tangentialebene dieser Fläche hat nach (5) S. 6 die Gleichung:

(7) $$(u+v)\,x + i(v-u)\,y + (uv-1)\,z - \frac{u^2+v^2}{2}(uv+3) = 0.$$

Die Mittelfläche des isotropen Strahlensystems bekommt nach (6) S. 7 die Darstellung:

$$x = \frac{1}{2}\frac{(u+v)^3}{1+uv}$$

(8) $$y = \frac{i}{2}\frac{(v-u)^3}{1+uv}$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{(u^2+v^2)(uv-3)}{1+uv}.$$

Als Gleichung ihrer Tangentialebene ergibt sich nach (2) S. 16:

$$2(v-u)(u^2+uv+v^2-3)\,x + 2\,i\,(u+v)(u^2-uv+v^2+3)\,y$$

(9) $$+ 6(u^2-v^2)\,z + 3(u^4-v^4) = 0.$$

Mit Hilfe der reellen Parameter α, β, die durch

$$u = \alpha - i\beta, \qquad v = \alpha + i\beta$$

definiert sind, werden die Gleichungen (6)

$$\begin{aligned} x &= \alpha(-\alpha^2 + 3\beta^2 + 3) \\ y &= \beta(3\alpha^2 - \beta^2 + 3) \\ z &= 3(\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei sind die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ auf der Minimalfläche der Krümmungslinien[1]). Die Gleichungen (8) werden in diesen Parametern:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \\ y &= \frac{4\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \\ z &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 3)}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ sind hier zueinander konjugiert (vgl. S. 21). Die Tangentialebene der Mittelfläche hat nun die Gleichung:

$$\begin{aligned} \beta(3\alpha^2 - \beta^2 - 3)x + \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 3)y - 6\alpha\beta z \\ - 6\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Das von den Minimalkurven (3) und (4) erzeugte isotrope Strahlensystem ist nach S. 12 von der 9. Ordnung und 4. Klasse. Von den 9 Geraden des Systems, die durch einen beliebigen Punkt gehen, sind immer drei reell.

Nach der Tabelle auf S. 45 ist die Ordnung der Mittelfläche 12, wie sich auch unmittelbar mittels derselben Methode wie früher aus den Gleichungen (11) bestätigen läßt.

Bei der Bestimmung der Klasse der Fläche ist zunächst zu untersuchen, ob die beiden Minimalkurven (4) und (5) sich schneiden. Dies ist, wie sich zeigt, für folgende fünf Parameterwertepaare der Fall:

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0 \\ u &= \pm\sqrt{3}, \quad v = \mp\sqrt{3} \\ u &= \pm i\sqrt{3}, \quad v = \pm i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

[1]) Darboux, a. a. O. I, S. 316.

Der erste Punkt ist der Anfangspunkt, die übrigen vier Punkte sind imaginär. Die beiden Minimalkurven haben also einen reellen und vier imaginäre Punkte gemein. Daher wird nach der Tabelle S. 45 die Klasse der Mittelfläche 7. Dasselbe ergibt sich bei der Bestimmung der Klasse mit Hilfe von (12).

Ebenso läßt sich die in der Tabelle angegebene Zahl für den Rang der Fläche, nämlich $a = 14$, vermöge der Gleichungen (11) und (12) bestätigen.

Es wurde schon im Kapitel III bemerkt, daß die Mittelfläche in den Schnittpunkten der beiden Minimalkurven ein eigentümliches Verhalten zeigt, indem es in diesen Punkten ∞^1 Tangentialebenen gibt, die ein Büschel bilden, dessen Achse die durch den Punkt gehende Gerade des isotropen Strahlensystems ist. Es möge dies für den Punkt

$$u = 0,\ v = 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha = 0,\ \beta = 0$$

näher untersucht werden. Ist $\beta = k\alpha$ die Gleichung einer durch diesen Punkt gehenden Kurve auf der Mittelfläche, so ist die Gleichung der Tangentialebene längs dieser Kurve nach (12):

$$k[\alpha^2(3 - k^2) - 3]x + [\alpha^2(1 - 3k^2) + 3]y - 6k\alpha z \\ - 6k\alpha^3(1 - k^2) = 0.$$

Dies wird für $\alpha = 0$:

$$y = kx.$$

Die Lage der Tangentialebene in diesem Punkt hängt also von der Richtung $\frac{d\beta}{d\alpha} = k$ ab, in der man durch den Punkt geht. Sie bilden ein Büschel, dessen Achse die z-Achse, d. h. die Gerade des Strahlensystems ist, die den Punkt zum Mittelpunkt hat. Das Entsprechende ließe sich für die übrigen vier Schnittpunkte der beiden Minimalkurven zeigen. Man könnte diese Punkte als besondere Arten von close-Punkten[1]) ansprechen, muß aber bedenken, daß die letzteren gewöhnliche Punkte der Rückkehrkurve sind, während unsere Punkte auch für die Rückkehrkurve selbst singulär sind.

Die Gleichung (5) S. 11 der Schnittkurve der Brennflächen wird:

$$(u + v)(u - v)(uv + 3) = 0$$

[1]) Vgl. H. G. Zeuthen, „Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques". Math. Ann. 10 (1876), S. 479 ff.

oder in den Parametern α, β:

$$\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + 3) = 0.$$

Sie zerfällt also in die beiden reellen Kurven $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und in eine imaginäre Kurve. Die Kurve $\alpha = 0$ bekommt nach (11) die Parameterdarstellung

$$x = 0, \qquad y = \frac{4\beta^3}{\beta^2 + 1}, \qquad z = -\beta^2 \frac{\beta^2 - 3}{\beta^2 + 1}$$

und die Kurve $\beta = 0$:

$$(13) \qquad x = \frac{4\alpha^3}{\alpha^2 + 1}, \qquad y = 0, \qquad z = \alpha^2 \frac{\alpha^2 - 3}{\alpha^2 + 1}.$$

Beide Kurven sind ganz dieselben ebenen Kurven 4. Ordnung, die sich nur durch ihre Lage unterscheiden. Die Ebene jeder dieser Kurven muß Tangentialebene der Fläche sein, was nach (12) auch der Fall ist. Zur weiteren Untersuchung einer dieser Kurven, etwa der Kurve $\beta = 0$, berechnen wir die Differentialquotienten der Ausdrücke (13) nach α:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{4\alpha^2(\alpha^2 + 3)}{(\alpha^2 + 1)^2}; \qquad \frac{dz}{d\alpha} = 2\alpha \frac{(\alpha^2 + 3)(\alpha^2 - 1)}{(\alpha^2 + 1)^2}.$$

Für $\alpha = 0$, d. i. im Anfangspunkt sind beide Differentialquotienten Null; die Kurve hat also in diesem Punkt eine Spitze, deren Tangente die z-Achse ist. Dasselbe gilt für die Kurve $\alpha = 0$, nur verlaufen hier die Kurvenzweige, die sich in der Spitze berühren, nach der anderen Seite.

Als Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt der Kurve (13) ergibt sich:

$$(\alpha^2 - 1)x - 2\alpha z - 2\alpha^3 = 0.$$

Die Kurve ist also von der dritten Klasse. Da man ferner noch ihr Geschlecht, nämlich Null, kennt, so kann man die übrigen Plückerschen Zahlen berechnen. Es ergibt sich, daß sie keine Doppelpunkte, dagegen drei Rückkehrpunkte hat und zwar außer den reellen im Anfangspunkt noch zwei imaginäre in den Punkten $\alpha = \pm i\sqrt{3}$, in denen sie die imaginäre Rückkehrkurve schneidet und die beiden Minimalkurven gemeinsam sind. Die Kurve hat ferner keine Wendepunkte, dagegen eine Doppeltangente mit der Gleichung

$$z + 1 = 0,$$

die in den Punkten $a = \pm 1$ berührt. Im übrigen ist die Gestalt der Kurve aus folgender Zeichnung ersichtlich:

Aus den Gleichungen (13) erhält man als Gleichung der Kurve:

$$x^2(x^2 + z^2) - 18x^2z - 16z^3 - 27x^2 = 0.$$

Sie zeigt, daß die Kurve durch die Kreispunkte geht und im unendlich fernen Punkt der z-Achse die unendlich ferne Gerade berührt.

Die imaginäre Rückkehrkurve mit der Gleichung

$$uv + 3 = 0$$

hat vermöge (8) die Parameterdarstellung:

$$(14) \quad x = -\frac{(u^2-3)^3}{4u^3}, \quad y = i\frac{(u^2+3)^3}{4u^3}, \quad z = \frac{3u^4+9}{2u^3}.$$

Die Ordnung dieser Kurve ist also 6, so daß sich als Ordnung der gesamten Rückkehrkurve in der Tat 14 ergibt. Die Differentialquotienten von (14) nach u, nämlich

$$\frac{dx}{du} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(u^2-3)^2(u^2+3)}{u^4}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{3i}{4}\cdot\frac{(u^2+3)^2(u^2-3)}{u^4}$$

$$\frac{dz}{du} = 3\frac{u^4-9}{u^3},$$

verschwinden für $u^2 + 3 = 0$ und $u^2 - 3 = 0$, d. h. in den Schnittpunkten mit den reellen Rückkehrkurven. Durch jeden der fünf Schnittpunkte der beiden Minimalkurven gehen also zwei Zweige der Rückkehrkurve der Fläche und zwar so, daß jeder in ihm eine Spitze hat, deren Tangente für beide Zweige dieselbe ist, nämlich die durch diesen Punkt gehende Gerade der isotropen Kongruenz, die ihn zum Mittelpunkt hat.

Jeder der reellen Rückkehrkurven entspricht auf der Enneperschen Minimalfläche ihre Evolute, die für die letztere geodätische Krümmungslinie ist. Die Kurve $\beta = 0$ auf der Minimalfläche hat nach (10) die Darstellung:

$$x = -\alpha(\alpha^2 - 3); \qquad y = 0; \qquad z = 3\alpha^2.$$

Dies ist eine Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt ($\alpha = \pm\sqrt{3}$), in der Tat die Evolute der Kurve mit den Gleichungen (13).

Die Gleichung (7) zeigt, daß die Tangentialebene der Minimalfläche längs der Kurve $uv + 3 = 0$, die zugleich Normalebene der imaginären Rückkehrkurve auf der Mittelfläche ist, immer durch den Anfangspunkt geht und mit der z-Achse denselben Winkel bildet. Die abwickelbare Fläche, die von diesen Ebenen umhüllt wird, ist also ein Rotationskegel und als Rückkehrkante dieses Kegels ist seine Spitze anzusehen, die daher der Mittelpunkt aller Schmiegungskugeln der imaginären Rückkehrkurve der Mittelfläche ist (vgl. S. 21). Daraus läßt sich aber schließen[1]), daß die letztere eine sphärische Kurve ist.

Der Teil der unendlich fernen Kurve der Mittelfläche, deren Gleichung in den Parametern u, v

$$1 + uv = 0$$

ist, ist nach S. 26 von der 6. Ordnung. Um den Schnitt unserer Fläche mit der unendlich fernen Ebene besser studieren zu können, benutzen wir homogene Koordinaten x, y, z, t und homogene Parameter u_1, u_2, u_3. Dann werden die Gleichungen (8) der Mittelfläche:

$$\begin{aligned} \varrho x &= (u_1 + u_2)^3 u_3; \qquad \varrho y = i(u_2 - u_1)^3 u_3 \\ \varrho z &= (u_1^2 + u_2^2)(u_1 u_2 - 3u_3^2); \qquad \varrho t = 2(u_1 u_2 + u_3^2) u_3^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man nun $u_2 = -\dfrac{u_3^2}{u_1}$, so erhält man in der unendlich fernen Ebene die Kurve:

$$\begin{aligned} \sigma x &= (u_1^2 - u_3^2)^3; \qquad \sigma y = -i(u_1^2 + u_3^2)^3; \\ \sigma z &= -4 u_1 u_3 (u_1^4 + u_3^4). \end{aligned} \tag{16}$$

Für die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Kugelkreis hat man:

$$\sigma^2(x^2 + y^2 + z^2) = 4 u_1^2 u_3^2 (u_1^4 - u_3^4) = 0.$$

[1]) Scheffers, a. a. O. I, S. 235—236.

Dies sind sechs Punkte, nämlich:

$$u_1 = 0; \quad u_3 = 0; \quad u_1 + u_3 = 0; \quad u_1 - u_3 = 0;$$
$$u_1 + i u_3 = 0; \quad u_1 - i u_3 = 0.$$

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß die ersten beiden Punkte die unendlich fernen Punkte der beiden Minimalkurven sind, durch die auch die imaginäre Rückkehrkurve geht, während die vier letzten Punkte den reellen Rückkehrkurven angehören. Jeder der sechs Punkte muß für den Schnitt der Kurve 6. Ordnung mit dem Kugelkreis zweifach zählen; es zeigt sich, daß in den ersten beiden Punkten Berührung zwischen beiden Kurven stattfindet, während die vier letzten Punkte Rückkehrpunkte der Kurve (16) sind.

Wir wollen noch die Gleichung der Tangente der Kurve (16) bestimmen. Die Gleichung (9) der Tangentialebene der Mittelfläche wird für $v = -\frac{1}{u}$:

$$2u(1+u^2)(u^4 - 4u^2 + 1)x + 2iu(1-u^2)(u^4 + 4u^2 + 1)y$$
$$+ 6u^2(u^4 - 1)z - 3(u^8 - 1)t = 0.$$

Für $u = 0$ und $u = \infty$ wird diese Ebene die unendlich ferne Ebene. Dies tritt in den unendlich fernen Punkten der beiden Minimalkurven ein. Die Tangente der Kurve (16) hat demnach in homogenen Koordinaten der unendlich fernen Ebene die Gleichung:

$$(1+u^2)(u^4 - 4u^2 + 1)x + i(1-u^2)(u^4 + 4u^2 + 1)y$$
$$+ 3u(u^4 - 1)z = 0.$$

Die Kurve ist also von der 6. Klasse und da ihr Geschlecht gleich Null ist, kann man die übrigen Plückerschen Zahlen berechnen und findet, daß sie 6 Doppelpunkte, 4 Rückkehrpunkte, 6 Doppeltangenten und 4 Wendepunkte hat.

Zu dem vollständigen Schnitt der Mittelfläche mit der unendlich fernen Ebene gehören ferner nach S. 32 die Tangenten des Kugelkreises in den unendlich fernen Punkten beider Minimalkurven, sowie zwei weitere Gerade. $t = 0$ gibt in den Gleichungen (15) außer $u_1 u_2 + u_3^2 = 0$ noch $u_3 = 0$, wofür man nur einen Punkt, den unendlich fernen Punkt der z-Achse, erhält. Der noch fehlende Teil der unendlich fernen Kurve kann daher nur den Fundamentalpunkten der durch (15) definierten Abbildung der Fläche auf die Ebene entsprechen (vgl. S. 26). Es sind dies die vier Punkte:

$$u_1 = 0,\ u_3 = 0; \qquad u_2 = 0,\ u_3 = 0;$$
$$u_1 + i u_2 = 0,\ u_3 = 0; \qquad u_1 - i u_2 = 0,\ u_3 = 0.$$

Den ersten beiden Punkten entsprechen in der nicht homogenen Schreibweise $v = \infty$ und $u = \infty$; dies sind die unendlich fernen Tangenten der Minimalkurven, nämlich die unendlich fernen Geraden der Ebenen

$$x \pm i y = 0,$$

wie man auch durch Ausführung des von Clebsch angegebenen Grenzverfahrens (s. Clebsch, a. a. O.) findet. Ebenso ergibt sich, daß den Punkten $u_1 \pm i u_2 = 0$, $u_3 = 0$ die unendlich fernen Geraden der Ebenen

$$x \mp y = 0$$

entsprechen[1]).

Der vollständige Schnitt der unendlich fernen Ebene mit der Fläche, von dem übrigens bloß die zwei zuletzt erhaltenen Geraden reell sind, ist nun in der Tat von der 12. Ordnung, wenn man noch bemerkt, daß die unendlich ferne Ebene für $u = \infty$ und $v = \infty$ die Fläche berührt, wie die auf S. 26 vorgetragene allgemeine Theorie und Gleichung (9) lehren.

Es ist leicht durch Untersuchung der Schnittkurven von Ebenen durch die z-Achse sich eine Vorstellung von unserer Fläche zu machen. Die Gleichung einer solchen Ebene sei:

$$y - k x = 0, \tag{17}$$

wo $k = \operatorname{tg}\varphi$ und φ der Winkel der Ebene mit der $(x z)$-Ebene ist. Wir führen in dieser Ebene ein $(x' z')$-Koordinatensystem ein, so daß ist:

$$x' = \frac{x}{\cos\varphi} = x\sqrt{1 + k^2}; \qquad z' = z.$$

Bezeichnet ferner a den reellen Wert von $\sqrt[3]{k}$, so wird aus (17), wenn man darin für x und y die Ausdrücke (11) einträgt:

$$(\beta - a\alpha)(\beta^2 + a\alpha\beta + a^2\alpha^2) = 0.$$

Die Schnittkurve der Ebene (17) mit der Mittelfläche zerfällt also in die reelle Kurve $\beta = a\alpha$ und in die beiden imaginären

[1]) Hier tritt also die Schwierigkeit der Auffindung dieser Geraden (vgl. S. 28—29) nicht auf, weil infolge der Form (1) von $f(u)$ und $\varphi(v)$ die Parameter eine andere Bedeutung haben.

$$\beta = \frac{a\,a}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Die reelle Kurve hat die Parameterdarstellung:

$$x' = \frac{4\,a^3\sqrt{1+a^6}}{(1+a^2)\,a^2+1}$$

$$z' = (1-a^2)\,a^2 \cdot \frac{(1+a^2)\,a^2-3}{(1+a^2)\,a^2+1}.$$

Die Kurve ist von der 4. Ordnung und das gleiche gilt offenbar auch von den beiden imaginären Kurven. Sie kann sich ihrer Gestalt nach nicht wesentlich von den reellen Rückkehrkurven unterscheiden, deren eine sich für $a = 0$ ergibt und dann für den vollständigen Schnitt dreifach zählt, dem Umstand entsprechend, daß sie Rückkehrkurve und ihre Ebene Tangentialebene der Fläche ist. Bemerkenswert ist ferner der Fall $a = \pm 1$, wo $z' = 0$ wird. Die reelle Kurve 4. Ordnung ist in die Gerade $z' = 0$, die dreifach zählt, da zu jedem Wert von x' drei Werte von a gehören, und in die unendlich ferne Gerade der Schnittebene zerfallen. Die beiden Geraden $\beta \pm a = 0$ sind also dreifache Linien der Fläche und zwar schneiden sich in ihnen je ein reeller und zwei imaginäre Mäntel.

Die Differentialquotienten von x' und z' nach a sind:

$$\frac{dx'}{da} = 4\,a^2\,[\,1+a^6 \cdot \frac{(1+a^2)\,a^2+3}{[(1+a^2)\,a^2+1]^2}$$

$$\frac{dz'}{da} = 2\,a\,(1-a^2) \cdot \frac{[(1+a^2)\,a^2+3]\,[(1+a^2)\,a^2-1]}{[(1+a^2)\,a^2+1]^2}$$

und daher ist:

$$\frac{dz'}{dx'} = \frac{1-a^2}{2\sqrt{1+a^6}} \cdot \frac{(1+a^2)\,a^2-1}{a}.$$

Alle Kurven haben im Anfangspunkt ($a = 0$) eine Spitze, deren Tangente die z-Achse ist. Für

$$a^2 = \frac{1}{1+a^2}$$

hat jede Kurve eine horizontale Doppeltangente, deren Berührungspunkte sind:

$$x' = \pm\frac{2}{1+a^2}\sqrt{\frac{1+a^6}{1+a^2}}; \qquad z' = -\frac{1}{1}\frac{1-a^2}{+a^2}.$$

Die Kurven sind zunächst für $a^2 < 1$ nach oben konkav (vgl. die Figur S. 56), die Entfernung der Doppeltangente von der (xy)-Ebene wird mit wachsendem φ immer kleiner, bis für $a = 1$ die Kurve eine Gerade geworden ist. Alsdann werden die Kurven nach oben konvex und nähern sich in ihrem Aussehen der Rückkehrkurve $a = 0$, der $a = \infty$ entspricht. Da die Fläche symmetrisch zur (xz)- und (yz)-Ebene ist, so ist der weitere Verlauf der Kurven bekannt. Der Schnitt der Fläche mit der (xy)-Ebene besteht aus den beiden Geraden $\alpha \pm \beta = 0$ und der Kurve

$$\alpha^2 + \beta^2 - 3 = 0.$$

Dafür wird:

$$x = \alpha^3, \quad y = \beta^3$$

und daher

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3.$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung einer Astroide, deren Spitzen die Schnittpunkte der reellen Rückkehrkurven mit der (xy)-Ebene sind. Da die Astroide von der 6. Ordnung ist und die beiden Geraden je dreifach zählen, so ist die gesamte Schnittkurve in der Tat von der 12. Ordnung.

Werden die Parameter α, β als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene gedeutet, so vermitteln sie bekanntlich eine konforme Abbildung der Minimalfläche auf die Ebene. Da die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ auf der Minimalfläche Krümmungslinien sind, so müssen die Haupttangentenkurven die Gleichungen haben:

$$\alpha - \beta = p = \text{const.} \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = q = \text{const.}$$

Diese Kurven sind auch auf der Mittelfläche Haupttangentenkurven. Führt man in (11) die Parameter p, q ein, so erhält man:

$$x = \frac{(p+q)^3}{p^2 + q^2 + 2}$$

$$y = \frac{(q-p)^3}{p^2 + q^2 + 2}$$

$$z = pq\,\frac{p^2 + q^2 - 6}{p^2 + q^2 + 2}.$$

Die Haupttangentenkurven sind also von der dritten Ordnung. Sie müssen die drei Rückkehrkurven berühren, was sich auch direkt zeigen läßt. Die beiden Geraden in der (xy)-Ebene gehören natürlich zu den Haupttangentenkurven.

Wie diese beiden Geraden durch den reellen Schnittpunkt der beiden Minimalkurven gehen, so gehen auch durch die vier übrigen singulären Punkte der Mittelfläche Gerade. Ein solcher Punkt ist z. B. der Punkt

$$\alpha = i\sqrt{3},\ \beta = 0 \quad \text{oder} \quad p = q = i\sqrt{3}.$$

Die Kurve $q = i\sqrt{3}$ hat die Darstellung:

$$x = 3i\sqrt{3} + p \cdot \frac{p^2 - 9}{p^2 - 1}$$

$$y = 3i\sqrt{3} - p\frac{p^2 - 9}{p^2 - 1}$$

$$z = p\frac{p^2 - 9}{p^2 - 1} i\sqrt{3}.$$

Setzt man

$$p\frac{p^2 - 9}{p^2 - 1} = \tau,$$

so erkennt man, daß diese Gleichungen eine imaginäre dreifache Gerade der Fläche bedeuten. So trifft die Ebene $x = 0$ im Punkte

$$p = -i\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \alpha = 0,\ \beta = i\sqrt{3},$$

also einem der beiden in der (yz)-Ebene gelegenen singulären Punkte. Infolge der Symmetrie der Fläche ergibt sich also: Die vier imaginären Geraden, welche die vier imaginären singulären Punkte der Mittelfläche miteinander verbinden und nicht in der (xy)- oder (yz)-Ebene liegen, gehören der Fläche als dreifache Linien an. Jede dieser Geraden schneidet übrigens auch eine der reellen Geraden; die oben dargestellte Gerade z. B. schneidet die Gerade $\beta = \alpha$ für $\tau = 0$ oder $p = 0$.

Diese dreifachen Geraden der Fläche müssen zur Doppelkurve der Fläche gehören, deren Ordnung nach der Tabelle S. 45 $b = 38$ ist. Da ein dreifacher Punkt einer ebenen Kurve für drei Doppelpunkte zählt, so absorbieren die sechs dreifachen Geraden von den 38 Doppelpunkten einer ebenen Schnittkurve 18. Bestimmt man nun die Doppelkurve, indem man aus den Gleichungen

$$\alpha^3(\alpha'^2 + \beta'^2 + 1) = \alpha'^3(\alpha^2 + \beta^2 + 1)$$

$$\beta^3(\alpha'^2 + \beta'^2 + 1) = \beta'^3(\alpha^2 + \beta^2 + 1)$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - 3)(\alpha'^2 + \beta'^2 + 1) = (\alpha'^2 - \beta'^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 - 3)(\alpha^2 + \beta^2 + 1)$$

α', β' eliminiert, so erhält man nach einer längeren Rechnung außer den dreifachen Geraden und den Rückkehrkurven noch das folgende Gleichungspaar:

$$(\alpha^2+\beta^2)^2[(3\mp i\sqrt{3})\alpha^2-(3\pm i\sqrt{3})\beta^2]+6[(3\mp i\sqrt{3})\alpha^4\mp 6i\sqrt{3}\,\alpha^2\beta^2 -(3\pm i\sqrt{3})\beta^4]+9[(3\mp i\sqrt{3})\alpha^2+(3\pm i\sqrt{3})\beta^2]=0.$$

Dies sind zwei konjugiert imaginäre Doppelkurven 10. Ordnung, deren Ordnung sich auch unabhängig von der Tabelle bestimmen läßt, indem man nach (11) die für einen beliebigen ebenen Schnitt bestehende Gleichung hinzunimmt:

$$4(A\alpha^3+B\beta^3)+C(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-3)+D(\alpha^2+\beta^2+1)=0$$

und die Zahl der von A, B, C, D abhängigen Schnittpunkte dieser beiden Kurven berechnet. Dabei ist von den unendlich fernen Punkten von $\alpha^2+\beta^2=0$, die auf beiden Kurven liegen und für die Bildkurve der Doppelkurven Doppelpunkte sind, abzusehen. Daher ist die Ordnung einer jeden der beiden Doppelkurven zunächst $4\cdot 6-4=20$. Aber da zu jedem Schnittpunkt der Ebene

$$Ax+By+Cz+D=0$$

mit einer Doppelkurve zwei Wertepaare α, β und α', β' gehören, so ist die erhaltene Zahl das Doppelte der Ordnungszahl. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die beiden imaginären Doppelkurven durch die mehrfach erwähnten fünf singulären Punkte der Fläche gehen.

Wir wollen nun auch die von den Doppeltangentialebenen umhüllte abwickelbare Fläche bestimmen, deren Klasse nach der Tabelle wegen $D=5$ sich zu $b'=8$ ergibt. Nach (12) müssen für die Berührungspunkte α, β und α', β' solcher Ebenen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}\beta(3\alpha^2-\beta^2-3)&=\varrho\,\beta'(3\alpha'^2-\beta'^2-3)\\ \alpha(\alpha^2-3\beta^2+3)&=\varrho\,\alpha'(\alpha'^2-3\beta'^2+3)\\ \alpha\beta&=\varrho\,\alpha'\beta'\\ \alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)&=\varrho\,\alpha'\beta'(\alpha'^2-\beta'^2).\end{aligned}$$

Hieraus sind ϱ, α', β' zu eliminieren. Außer den Rückkehrkurven (als parabolischen Kurven) ergeben sich dabei noch die Kurven:

$$\alpha+\beta=0,\qquad \alpha-\beta=0$$

$$\alpha^2-3\beta^2+3=0 \tag{18}$$

$$3\alpha^2-\beta^2-3=0. \tag{19}$$

Auf den beiden reellen Geraden gibt es also zu jedem Punkt einen zweiten, in dem dieselbe Ebene die Fläche berührt wie im ersten. Längs der Kurve (18) stehen die Tangentialebenen auf der (xz)-Ebene, längs der Kurve (19) auf der (yz)-Ebene senkrecht, wie Gleichung (12) zeigt. Die beiden Berührungspunkte einer Tangentialebene in Punkten der Kurve (18) haben die Parameter:

$$\alpha, \beta \text{ und } \alpha' = \alpha, \qquad \beta' = -\beta.$$

Sie liegen also auf derselben Kurve $\alpha = \text{const.}$ und symmetrisch zur (xz)-Ebene.

Um die Gleichung der Tangentialebene der Fläche längs der Kurve (18) zu erhalten, benutzen wir eine Parameterdarstellung dieser Kurve, z. B.

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - 3}{2\lambda}, \qquad \beta = -\frac{\lambda^2 + 3}{2\lambda\sqrt{3}}.$$

Setzt man dies in (12) ein, so ergibt sich:

$$4\lambda(\lambda^4 - 12\lambda^2 + 9)x - 18\lambda^2(\lambda^2 - 3)z - 3(\lambda^2 - 3)(\lambda^4 - 12\lambda^2 + 9) = 0.$$

Die Klasse der von dieser Ebene umhüllten abwickelbaren Fläche ist nicht etwa 6, sondern 3, da zu den sechs Werten von λ, die sich aus der Bedingung ergeben, daß diese Ebene durch einen bestimmten Punkt geht, sechs Punkte α, β gehören, von denen je zwei in einer Ebene liegen. Ordnet man nach Potenzen von λ, so bemerkt man, daß die Gleichung eine reziproke ist. Formt man sie dann in bekannter Weise um und setzt $\lambda - \frac{3}{\lambda} = \mu$, so wird sie:

$$4(6 - \mu^2)x + 18\mu z + 3\mu(\mu^2 - 6) = 0.$$

Da das gleiche für die durch (19) dargestellte Kurve gilt und längs der beiden reellen Geraden die Tangentialebenen ein Büschel bilden, so ist die Klasse der gesamten abwickelbaren Fläche der Doppeltangentialebenen in der Tat $b' = 8$.

Für die Klasse c' der von den parabolischen Ebenen umhüllten Fläche kommt nur die imaginäre Rückkehrkurve in Betracht. Die Gleichung der Tangentialebenen längs dieser Kurve ergibt sich aus (9) wegen $v = -\frac{3}{u}$ zu:

$$2u(u^2 - 3)x - 2iu(u^2 + 3)y - 6u^2 z - 3(u^4 + 9) = 0.$$

Es ist also in Übereinstimmung mit der Tabelle $c' = 4$.

§ 2. Die Mittelfläche des allgemeinsten zur Enneperschen Minimalfläche gehörenden isotropen Strahlensystems.

Wir setzen nach S. 7:

$$f(u) = \tfrac{1}{2}(u^3 + a\,i(1-u^2) + b(1+u^2) + c\,i\,u)$$
$$\varphi(v) = \tfrac{1}{2}(v^3 - a\,i(1-v^2) + b(1+v^2) - c\,i\,v),$$

wobei jetzt $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ geschrieben wurde an Stelle des früheren a, b, c, was bei Anwendung früherer Formeln zu beachten ist. Nach (4) S. 17 und (8) S. 52 werden nun die Gleichungen der Mittelfläche:

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(u+v)^3}{1+uv} + c\,i\,\frac{v-u}{1+uv} + 2\,b\,\frac{uv-1}{1+uv}$$
$$y = \frac{i}{2}\cdot\frac{(v-u)^3}{1+uv} + 2\,a\,\frac{uv-1}{1+uv} - c\,\frac{u+v}{1+uv}$$
$$z = \frac{1}{2}\,\frac{(u^2+v^2)(uv-3)}{1+uv} - 2\,b\,\frac{u+v}{1+uv} - 2\,a\,i\,\frac{v-u}{1+uv}$$

oder wenn man wieder

$$u = \alpha - i\beta \quad \text{und} \quad v = \alpha + i\beta$$

setzt[1]):

$$x = \frac{4\alpha^3 - 2c\beta + 2b(\alpha^2+\beta^2-1)}{\alpha^2+\beta^2+1}$$
$$y = \frac{4\beta^3 + 2a(\alpha^2+\beta^2-1) - 2c\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}$$
$$z = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-3) - 4b\alpha + 4a\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}.$$

Nach S. 17 und (4), (5) S. 52 sind die beiden Minimalkurven, die das isotrope Strahlensystem erzeugen, dargestellt durch:

$$\xi_1 = 3u - u^3 - 2ai; \quad \eta_1 = i(3u + u^3 + 2b); \quad \zeta_1 = 3u^2 - ci$$
$$\xi_2 = 3v - v^3 + 2ai; \quad \eta_2 = -i(3v + v^3 + 2b); \quad \zeta_2 = 3v^2 + ci.$$

Nach (5) S. 18 wird jetzt die Gleichung der Tangentialebene, wenn man die Parameter α, β einführt:

[1]) Vgl. auch Ribaucour, a. a. O., § 192, S. 235.

$$[\beta(3\alpha^2 - \beta^2 - 3) - 2\alpha]x + [\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 3) + 2b]y$$
$$- (6\alpha\beta + c)z - 6\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) - 2a\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 - 3)$$
$$- 2b\beta(3\alpha^2 - \beta^2 + 3) + 3c(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Die Plückerschen Zahlen des ebenen Schnitts der Fläche sind dieselben wie früher:

$$n = 12, \quad a = 14, \quad b = 38, \quad c = 14.$$

Dagegen sind diejenigen des Tangentenkegels aus einem Punkt, wie die Tabelle S. 45 zeigt und wie man auch direkt bestätigen kann, andere, nämlich:

$$n' = 12, \quad a = 14, \quad b' = 38, \quad c' = 14.$$

Als Gleichung der Rückkehrkurve ergibt sich jetzt:

$$\tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)(uv + 3) - 2ai(u + v) + 2b(u - v) + ci(1 - uv) = 0$$

oder in den Parametern α, β:

$$2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2 + 3) + 4a\alpha + 4b\beta + c(\alpha^2 + \beta^2 - 1) = 0.$$

Sie zerfällt jetzt im allgemeinen nicht, sondern ist eine Raumkurve 14. Ordnung. Da sie Schnittkurve der Tangentenflächen der beiden Minimalkurven ist, so hat sie in einem Schnittpunkt einer Minimalkurve mit der Tangentenfläche der anderen einen Rückkehrpunkt. Dies gilt nicht für die unendlich fernen Punkte der Minimalkurven, in denen eine Kurve die Tangentenfläche der anderen berührt. Eine Minimalkurve schneidet die Tangentenfläche der anderen in $4 \cdot 3 = 12$ Punkten, von denen 10 Punkte Spitzen der Schnittkurve beider Tangentenflächen sind. Die letztere hat daher 20 Rückkehrpunkte. In einem Schnittpunkt der beiden Minimalkurven fallen vier solcher Rückkehrpunkte zusammen, und in der Tat hatte bei der im § 1 betrachteten Fläche die Rückkehrkurve fünf solcher Punkte.

Es sei noch die Bemerkung gestattet: Eliminiert man aus den Gleichungen

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2$$

u, v, so erhält man eine Gleichung zwischen a, b, c. Man kann also, wenn man zwei der Größen a, b, c willkürlich wählt, immer die dritte so bestimmen, daß die beiden Minimalkurven sich schneiden. Es gibt sohin zu einer Minimalfläche noch ∞^2 isotrope Strahlensysteme von der Eigenschaft, daß die sie erzeugen-

den Minimalkurven sich schneiden. Die beiden Minimalkurven können sich übrigens in unserem Fall in nicht mehr als fünf Punkten schneiden. Denn wenn sich die beiden Minimalkurven in sechs Punkten schnitten, so zählten sie für $2 \cdot 6 = 12$ Schnittpunkte einer Minimalkurve mit der Tangentenfläche der anderen, auf der aber noch der unendlich ferne Punkt der ersten Minimalkurve liegt[1]), so daß sie also mehr als 12 Schnittpunkte gemein hätten. Dann müßte die eine Minimalkurve ganz auf der Tangentenfläche der anderen liegen, was unmöglich ist, wie man leicht einsieht.

Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen dieses Kapitels sind in folgenden Sätzen enthalten:

Die Mittelfläche des allgemeinsten zur Enneperschen Minimalfläche gehörenden isotropen Strahlensystems ist von der 12. Ordnung und Klasse und vom Range 14. Sie besitzt eine Doppelkurve 38. Ordnung und eine Rückkehrkurve 14. Ordnung. Ebenso ist die Klasse der abwickelbaren Fläche der doppelt berührenden Ebenen 38 und die der parabolischen Ebenen 14. Ihre Haupttangentenkurven sind von der dritten Ordnung. Schneiden sich die beiden Minimalkurven, welche das Strahlensystem erzeugen, so erleiden die Zahlen für die Klasse der Fläche, die Klasse der abwickelbaren Fläche der Doppeltangentialebenen, sowie der der parabolischen Ebenen eine Verminderung. Von besonderem Interesse ist die Mittelfläche des Strahlensystems, bei dem sich die Minimalkurven in fünf Punkten, der größtmöglichen Zahl von Schnittpunkten, schneiden. Ihre Klasse ist 7; an die Stelle einer Doppelkurve treten zwei reelle und vier imaginäre dreifache Gerade und zwei imaginäre Doppelkurven 10. Ordnung; ihre Rückkehrkurve besteht aus zwei reellen ebenen Kurven 4. Ordnung und einer imaginären Kurve 6. Ordnung. Die von den Doppeltangentialebenen umhüllte Fläche zerfällt in zwei reelle Zylinder 3. Klasse und zwei Ebenenbüschel.

[1]) Würden sich die beiden Kurven außer in fünf endlichen Punkten noch in ihren unendlich fernen Punkten treffen, so hätten sie gleichfalls zu viel Punkte gemein, da sich dann im unendlich fernen Punkt die beiden Minimalkurven berühren würden, die eine mit der Tangentenfläche der anderen daher in diesem Punkt schon vier vereinigte Punkte gemein hätte.

Die parabolischen Ebenen umhüllen eine imaginäre abwickelbare Fläche von der 4. Klasse. Die fünf Schnittpunkte der beiden Minimalkurven, von denen einer reell ist, sind auf der Mittelfläche singuläre Punkte von der Eigenschaft, daß die Fläche in ihnen ein Büschel von Tangentialebenen hat. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei Zweige der Rückkehrkurve, deren jeder in ihm eine Spitze hat, deren gemeinsame Tangente die Achse des Büschels der Tangentialebenen ist, sowie zwei der dreifachen Geraden und die beiden imaginären Doppelkurven.

Lebenslauf.

Ich, Ludwig Pausch, bin am 22. Januar 1888 als Sohn des damaligen Oberrechnungsrates und jetzigen Staatsrates i. o. D. Max v. Pausch in München geboren und protestantischer Konfession. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule kam ich im Herbst 1897 an das Maximilians-Gymnasium in München, dem ich 3 Jahre angehörte. Dann trat ich an das Realgymnasium über, das ich im Jahre 1906 absolvierte.

Hierauf studierte ich 2 Jahre an der Technischen Hochschule zu München, wobei ich auch gleichzeitig Hospitant an der Universität war, sodann 3 Jahre an der Universität München Mathematik und Physik. Dabei hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren Cornelius, Doehlemann, Graf du Moulin-Eckart, v. Dyck, Ebert, Emden, Finsterwalder, Fischer, Föppl, Graetz, Günther, v. Heigel, Kutta, Lindemann, Muthmann, Perron, Pringsheim, Röntgen, Schmauss, v. Seeliger, Sommerfeld, Voss. Im Herbst 1908 bestand ich den ersten, im Herbst 1910 den zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik.

Seit 1. November 1911 werde ich als Assistent für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule in München verwendet.